実用数学検定１級
第176回２次検定

平成 22 年 5 月 9 日

はじめに

拙稿は私が個人的に趣味で作成した数検の解答案にすぎません．完璧なはずがありません．拙稿で勉強しようなどと横着なことはせず，然るべく教科書で本物の数学を学び，各自数検に挑むようにして下さい．利用の仕方は自由ですが，全て閲覧者の自己責任でお願い致します.

問題 1．（選択）

整数 x, y, z は

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{5}+\frac{z}{9}=\frac{113}{45}$$

を満たし，かつ左辺の各項は正の既約分数であるとします．このような x, y, z の組を全て求めなさい．

《解答》

与えられた式を

$$15x+9y+5z=113$$

と書きかえる．直ちに，$x \leq 7$ であることが分かるが，$x/3$ が既約分数であることから，$x=1,2,4,5,7$ の５つが候補にあがり，この程度の数なら実際に試した方が早かろう．

$$\begin{aligned}
x &= 1 \text{ のとき}, 9y+5z=98 \text{ より } (y,z)=(2,16),(7,7). \\
x &= 2 \text{ のとき}, 9y+5z=83 \text{ より } (y,z)=(2,13),(7,4). \\
x &= 4 \text{ のとき}, 9y+5z=53 \text{ より } (y,z)=(2,7). \\
x &= 5 \text{ のとき}, 9y+5z=38 \text{ より } (y,z)=(2,4). \\
x &= 7 \text{ のとき}, 9y+5z=8 \text{ より不適}.
\end{aligned}$$

以上に挙げたものが条件を満たす．

問題２． （選択）

３個の数 l, m, n は公差が正の等差数列をなし，かつ $l+m+n=lmn$ を満たすとします．このとき，次の問いに答えなさい．

(1) 正の整数 l, m, n で上の条件を満たすものは $l=1, m=2, n=3$ に限ることを証明しなさい．

(2) 上の条件を満たす正の有理数 $l.m.n$ の組は無数にあります．その事例を２つ見つけなさい．ただし，それを導く手続きも分かりやすく示しなさい．

《解答》

(1) 先ず，$(l,m,n)=(1,2,3)$ が条件を満たすことはすぐ分かる．これ以外に，条件を満たす (l,m,n) が存在しないことを示そう．公差を $d(\geq 1)$ とする．

$$(l,m,n)=(m-d,m,m+d)$$

で，$l+m+n=lmn$ より，

$$\begin{aligned} 3m &= m(m^2-d^2) \\ 3 &= m^2-d^2 \end{aligned} \tag{1}$$

を得る．ところで，m は d より大きい正の整数であるので，$m \leq d+1$ である．従って，

$$\begin{aligned} 3 = m^2-d^2 &\geq (d+1)^2-d^2 \\ &= 2d+1 \end{aligned}$$

が分かるが，これを満たす整数 d は $d=1$ のみである．このときもちろん，(1) 式より

$$m^2-1^2=3 \quad \therefore m=2$$

を得て，$(l,m,n)=(1,2,3)$ となる．

(2) $m^2-d^2=3\ (m>d>0)$ なる有理数 m,d を見つければ良い．先ず，(m,d) が無数にあることを示そう．$m=d+\delta\ (\delta>0)$ とおくと，

$$\begin{aligned} (d+\delta)^2-d^2 &= 3 \\ \delta(2d+\delta) &= 3 \\ d &= \frac{3/\delta-\delta}{2} > 0 \end{aligned} \tag{2}$$

が成り立つことが分かる．右側の不等式を解くと，

$$\begin{aligned} 3-\delta^2 &> 0 \\ 0 < \delta &< \sqrt{3} \end{aligned}$$

となる．このような有理数 δ は明らかに無数にあり，このとき，(2) 式より d も有理数となる．従って，条件を満たす有理数 (l,m,n) は無数に存在することになる．具体例は適当に $\delta=1/2, 1/3$ を選ぼう．(2) 式より

$$(\delta,d)=(\frac{1}{2},\frac{11}{4}),(\frac{1}{3},\frac{13}{3})$$

で，直ちに

$$(l,m,n)=(\frac{1}{2},\frac{13}{4},6),(\frac{1}{3},\frac{14}{3},9)$$

を得る．

補足

自分を信じた力技解答である．定石を言えば，有理数 m なんぞと言われれば，

$$m=\frac{p}{q}\ (p,q:\text{整数})$$

と置くのがフツウであろう．

問題３．（選択）

$\cos 40^\circ, \cos 80^\circ, \cos 160^\circ$ の値を解とする整数係数の３次方程式を求めなさい．答えは最高次数の係数が正，かつ係数全体の公約数が１以外にないように標準化した形で求めなさい．

《解答》

高校数学の公式の中で最も嫌われ者である，和⇔積の変換公式を多用する問題である．

$$\begin{aligned}&(x-\cos 40)(x-\cos 80)(x-\cos 160)\\ &= x^3-(\cos 40+\cos 80+\cos 160)x^2\\ &\quad +(\cos 40\cos 80+\cos 80\cos 160+\cos 160\cos 40)x-\cos 40\cos 80\cos 160\\ &\equiv x^3-Ax^2+Bx-C\end{aligned}$$

とおいて，それぞれの係数を簡単にしよう．

$$\begin{aligned}\cos 40+\cos 80+\cos 160 &= 2\cos 60\cos 20+\cos 160\\ &= \cos 20+\cos 160\\ &= -\cos 160+\cos 160 = 0\end{aligned}$$

次に B を計算したいが，その準備として

$$\begin{aligned}\cos 40\cos 80 &= \frac{1}{2}(\cos 120+\cos 40) = \frac{1}{2}(\cos 40-\frac{1}{2})\\ \cos 80\cos 160 &= \frac{1}{2}(\cos 240+\cos 80) = \frac{1}{2}(\cos 80-\frac{1}{2})\\ \cos 160\cos 40 &= \frac{1}{2}(\cos 200+\cos 120) = \frac{1}{2}(\cos 200-\frac{1}{2})\end{aligned}$$

を用意しておき，

$$\begin{aligned}B &= \frac{1}{2}(\cos 40\cos 80+\cos 200-\frac{3}{2})\\ &= \frac{1}{2}(\cos 20+\cos 200-\frac{3}{2})\\ &= \frac{1}{2}(2\cos 110\cos 90-\frac{3}{2}) = -\frac{3}{4}\end{aligned}$$

を得る．最後に

$$\begin{aligned}C &= \cos 40\cos 80\cos 160\\ &= \frac{1}{2}\cos 40\cos 160-\frac{1}{4}\cos 160\\ &= \frac{1}{4}(\cos 200+\cos 120)-\frac{1}{4}\cos 160\\ &= \frac{1}{4}(\cos 200-\cos 160-\frac{1}{2})\\ &= \frac{1}{4}(\cos 110\cos 90-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{8}\end{aligned}$$

を計算し，$x^3-3/4x+1/8=0$ を得る．これを標準化し $8x^3-6x+1=0$ が最終的な解である．

問題 4．（選択）

次の 3 次の行列 A に対するジョルダン標準形 J と，そのための変換行列 P ($P^{-1}AP = J$ を満たす P) を求めなさい．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

《解答》

先ず A の固有値 λ を求めよう．

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(\lambda-1)^3 \end{aligned}$$

より，固有値 $\lambda = 1$ が見つかる．このとき，固有ベクトル v_1 は

$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が選べる．続いて，$(A-E)v_2 = v_1$ なる v_2 を探すと，$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ がとれる．さらに，$(A-E)v_3 = v_2$ なる v_3 は，$v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ が選べる．従って，$(A-E)$ と 3 つのベクトル v_1, v_2, v_3 を並べた 3 次行列の掛け算を考えると，

$$\begin{aligned} (A-E)\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & v_1 & v_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \therefore\ A\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を得る．故に

$$
\begin{aligned}
P &= \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1/2 \\ 1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \\
J &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となる．

問題５．（選択）

λ を正の数とし，k を正の整数とします．次の確率密度関数をもつ分布をアーラン分布といいます．

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(k\lambda)^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-k\lambda x} & (x \geq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これは $k=1$ のとき指数分布となります．アーラン分布に従う確率変数 X の期待値と分散を求めなさい．

《解答》

期待値を定義通りに計算しよう．

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^\infty x f(x)\,dx \;=\; \frac{(k\lambda)^k}{(k-1)!}\int_0^\infty x^k e^{-k\lambda x}\,dx \\ &= \frac{(k\lambda)^k}{(k-1)!}\left\{\left[x^k \frac{e^{-k\lambda x}}{-k\lambda}\right]_0^\infty + \frac{1}{k\lambda}\int_0^\infty k x^{k-1} e^{-k\lambda x}\,dx\right\} \\ &= \frac{(k\lambda)^k}{(k-1)!}\left\{\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty x^{k-1} e^{-k\lambda x}\,dx\right\} \\ &= \frac{(k\lambda)^k}{(k-1)!}\frac{k!}{(k\lambda)^k}\int_0^\infty e^{-k\lambda x}\,dx \\ &= k\left[\frac{e^{-k\lambda x}}{-k\lambda}\right]_0^\infty \;=\; \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

と逐次部分積分を行えばよい．ここで，

$$\lim_{x\to\infty} x^k e^{-k\lambda x} = 0$$

を既知としたが，これには説明が必要であろう．

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^k}{e^{k\lambda x}} \;=\; \lim_{x\to\infty}\frac{kx^{k-1}}{(k\lambda)e^{k\lambda x}} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{k!}{(k\lambda)^k}\frac{1}{e^{k\lambda x}} \;=\; 0 \end{aligned}$$

と，ロピタルの定理を繰り返すことで計算できるのである．続いて分散は，

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

なので，$E(X^2)$ を求めれば良い．

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_0^\infty x^2 f(x)\,dx \;=\; \frac{(k\lambda)^k}{(k-1)!}\int_0^\infty x^{k+1} e^{-k\lambda x}\,dx \\ &= \frac{(k\lambda)^k}{(k-1)!}\frac{(k+1)!}{(k\lambda)^{k+1}}\int_0^\infty e^{-k\lambda x}\,dx \\ &= \frac{(k+1)k}{k\lambda}\cdots\frac{1}{k\lambda} \;=\; \frac{k+1}{k\lambda^2} \end{aligned}$$

よって，

$$V(X) = \frac{k+1}{k\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{k\lambda^2}$$

を得る．

教訓

平均 $E(X)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\ dx$，分散 $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$ の公式がキモである．また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^k}{e^x}=0$ は覚えておき，本問のようにある程度の説明を付加すべきであろう．

問題６．（必須）

a, b, c, d はどれも 0 でない実数とし，$a+b=c+d$ および $a^3+b^3=c^3+d^3$ を満たすとします．次の問いに答えなさい．

(1) このとき，$a^2+b^2=c^2+d^2$ が成立するかを考察しなさい．

(2) このとき，$n \geq 4$ である整数 n について $a^n+b^n=c^n+d^n$ が成立するかを考察しなさい．

《解答》

(1) $a+b=c+d$ の両辺を２乗，３乗すると，

□ $a^2+b^2+2ab=c^2+d^2+2cd$

□ $a^3+b^3+3ab(a+b)=c^3+d^3+3cd(c+d)$

を得るが，$a+b=c+d=X$，$a^3+b^3=c^3+d^3=Y$ として，▪式を書き換えると

$$Y+3abX=Y+3cdX$$

なることから，$ab=cd$ を得る．さらに▪より

$$a^2+b^2=c^2+d^2$$

が成立することが分かる．

(2) ある n について，$a^n+b^n=c^n+d^n$，$a^{n+1}+b^{n+1}=c^{n+1}+d^{n+1}$ を仮定しよう．今，$a+b=c+d$ が成り立つから，１つ目の等式を辺々掛けて，

$$\begin{aligned}(a+b)(a^n+b^n) &= (c+d)(c^n+d^n)\\ a^{n+1}+b^{n+1}+ab(a^{n-1}+b^{n-1}) &= c^{n+1}+d^{n+1}+cd(c^{n-1}+d^{n-1})\end{aligned}$$

を得る．(1) で $ab=cd$ を示したことを思い出すと，

$$a^n+b^n=c^n+d^n$$

が直ちに示される．以上を，(1) の証明と併せると，$n \geq 1$ なる n について上式の成立が帰納的に言えるのである．

問題 7．（必須）

放物線 $y^2 = 4ax$ $(a > 0)$ と $3y = 8x$ の原点 O 以外の交点を A とします．このとき，O から A までの放物線の長さを計算しなさい．

《解答》

先ず点 A の座標 $(\frac{9}{16}a, \frac{3}{2}a)$ を求めておく．曲線の長さ L は，

$$L = \int_0^{3/2a} \sqrt{1 + (\frac{dx}{dy})^2}\ dy$$

により計算される．$x = y^2/4a$ より，$dx/dy = y/2a$ であるから，

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{3/2a} \sqrt{1 + (\frac{y}{2a})^2}\ dy \\
&= \frac{1}{2a}\int_0^{3/2a} \sqrt{4a^2 + y^2}\ dy \\
&= \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{2}(y\sqrt{y^2+4a^2} + 4a^2 \log|y + \sqrt{y^2+4a^2}|)\right]_0^{3/2a} \\
&= (\frac{15}{16} + \log 2)a
\end{aligned}$$

となる．

教訓

簡単な問題だったが教訓は多い．
曲線の長さの公式

$$L = \int \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} dx$$

くらいは覚えておこう．しかし，公式通りに x による積分に拘り，面倒な計算に挑んでは行けない．点が取れないばかりか，頭脳硬直型の受験生と判断されかねない．君子危うきに近寄らずの精神で，さっさと y による積分を考えよう．このステップをクリアし，めでたく

$$\int \sqrt{x^2 + a} dx$$

なる積分に到達しハッとするであろう．公式を覚えていれば良いが，どうしても思い出せない場合どうするか．$\cdots$ この機会に無理関数の積分に対抗する強力兵器，逆双曲を行使することを覚えよう．

$$a\cosh^2 t - a\sinh^2 t = a$$

は誰でも知っている．$x = \sqrt{a}\cosh t$ とおくと，

$$\begin{aligned}
x^2 - a &= a\sinh^2 t \\
\sqrt{x^2 - a} &= \sqrt{a}\sinh t
\end{aligned}$$

等となり，有理化できるのである．本問の場合，$x=\sqrt{a}\sinh t$ とおき，

$$\begin{aligned} x^2+a &= a\cosh^2 t \\ \sqrt{x^2+a} &= \sqrt{a}\cosh t \end{aligned}$$

なので，$dx=\sqrt{a}\cosh t\ dt$ であるから，

$$\begin{aligned} L &= \int \sqrt{a}\cosh t \cdot \sqrt{a}\cosh t\ dt \\ &= a\int \cosh^2 t\ dt \end{aligned}$$

と有理化される．