実用数学検定１級
第161回２次検定

平成22年5月9日

はじめに

拙稿は私が個人的に趣味で作成した数検の解答案にすぎません．完璧なはずがありません．拙稿で勉強しようなどと横着なことはせず，然るべく教科書で本物の数学を学び，各自数検に挑むようにして下さい．利用の仕方は自由ですが，全て閲覧者の自己責任でお願い致します.

問題１．（選択）

n が 2 以上の整数とするとき，分数

$$\frac{15n+2}{14n+3}$$

が可約分数（分母，分子が約分できる分数）となるような n の一般形を求めなさい．また，そのときこの分数を約分して既約分数を求めなさい．

《解答》

分数が可約であるとき，適当な自然数 k, a, b を用いて，

$$\begin{cases} 15n+2=kb \\ 14n+3=ka \end{cases}$$

と書ける．

$$\begin{aligned} 15\times(14n+3)-14\times(15n+2) &= 17 \\ &\equiv 0 \pmod{17} \end{aligned}$$

より，k が 17 の倍数であることが分かる．よって，

$$15n+2\equiv 14n+3\equiv 0 \pmod{17}$$

でなければならない．これは

$$15(n-1)\equiv 14(n-1)\equiv 0 \pmod{17}$$

と変形できるので，$n-1$ が 17 の倍数であることが分かる．以上で，

「$\dfrac{15n+2}{14n+3}$ が可約分数であれば，$n-1=17m$（m：自然数）」

が示せた．この逆が，

$$\frac{15n+2}{14n+3}=\frac{15(17m+1)+2}{14(17m+1)+3}=\frac{17(15m+1)}{17(14m+1)}=\frac{15m+1}{14m+1}$$

より直ちに示されると共に，$\dfrac{15m+1}{14m+1}$ が求める既約分数と分かる．

問題２．（選択）

正の整数 a, b, c があり，a^2, b^2, c^2 がこの順に公差 d $(d > 0)$ の等差数列をなすとします．このとき，次の問いに答えなさい．

(1) 公差 d は 24 の倍数になることを証明しなさい．

(2) 公差が最小値の 24 のときの a, b, c の値を求めなさい．

《解答》

a^2, b^2, c^2 が等差数列をなすことから，

$$\begin{aligned} 2b^2 &= a^2 + c^2 \\ b^2 &= \left(\frac{c+a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-a}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

である．第二式は，$b, \dfrac{c+a}{2}, \dfrac{c-a}{2}$ がピタゴラス数であることを意味する．このとき，$\dfrac{c+a}{2}, \dfrac{c-a}{2}$ の一方が 3 の倍数で，一方が 4 の倍数であることを利用すると，整数 m, n に対して，

$$\begin{aligned} (1)\ \frac{c+a}{2} &= 3m, \quad \frac{c-a}{2} = 4n \\ (2)\ \frac{c+a}{2} &= 4m, \quad \frac{c-a}{2} = 3n \\ (3)\ \frac{c+a}{2} &= 12m, \quad \frac{c-a}{2} = n \\ (4)\ \frac{c+a}{2} &= m, \quad \frac{c-a}{2} = 12n \end{aligned}$$

のいずれかを満たさねばならぬ．(1)〜(4) いずれの場合も，

$$\frac{c+a}{2} \cdot \frac{c-a}{2} = 12mn$$

を満たすことになる．さらに，

$$c^2 - a^2 = 48mn$$

と変形すれば，直ちに $d = 24mn$ が言え，24 の倍数であることが分かる．

問題３．（選択）

数列 $\{a_n\}(n=1,2,3,\cdots)$ が

$$1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 10,\ 11,\ 13,\ 14,\ \cdots$$

で与えられています．このとき，次の問いに答えて下さい．

(1) 第 n 項 a_n を n の式で表しなさい．

(2) 級数 $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 1651$ となる n の値を求めなさい．

《解答》

数列 $\{a_n\}$ を

$$(1,\ 2),\ (4,\ 5),\ (7,\ 8),\ (10,\ 11),\ \cdots$$

のように群数列ととらえると，第 k 群は $(3k-2,\ 3k-1)$ と表される．このことを利用し a_n を求めるには，n の偶奇による場合分けが必要となる．**(1)**n が偶数のとき，a_n は第 $n/2$ 群の第２項であるから，

$$a_n = \frac{3}{2}n - 1$$

である．**(2)**n が奇数のとき，a_n は第 $(n+1)/2$ 群の第１項であるから，

$$a_n = \frac{3(n+1)}{2} - 2 = \frac{3}{2}n - \frac{1}{2}$$

である．

続いて，S_n についても偶奇に分けて考える．n が偶数のとき $n = 2m$ (m : 自然数) と書くことにすると，

$$S_{2m} = \sum_{k=1}^{2m} a_k^2$$

は，第 m 群までの全ての項の２乗和を意味する．第 l 群に含まれる２項の２乗和は，

$$(3l-2)^2 + (3l-1)^2 = 18l^2 - 18l + 5$$

で表されるから，

$$\begin{aligned} S_{2m} &= \sum_{l=1}^{m} 18l^2 - 18l + 5 \\ &= 18 \cdot \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1) - 18 \cdot \frac{1}{2}m(m+1) + 5m \\ &= m(6m^2 - 1) \ \equiv\ S'_m \end{aligned}$$

適当な自然数 m を代入していくと，

$$1290 = S'_6 < 1651 < S'_7 = 2051$$

が分かる．つまり，第 12 項まで足しても不足し，第 14 項まで足すと超過してしまうのだから，第 13 項まで足せば良いはずである．

問題４．（選択）

$a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0$ のとき，不等式

$$(a^3 + b^3 + c^3)^4 \geq (a^4 + b^4 + c^4)^3$$

が成り立つことを示しなさい．また，等号が成り立つ条件を求めなさい．

《解答》

与えられた不等式の両辺を形式的に a^{12} で割ると，

$$\left(1 + (\frac{b}{a})^3 + (\frac{c}{a})^3\right)^4 \geq \left(1 + (\frac{b}{a})^4 + (\frac{c}{a})^4\right)^3 \tag{1}$$

を得る．もちろん $a > 0$ を仮定したときのみ数学的に正しい変形といえるが，ここでは

$$a \geq b \geq c > 0$$

と順序関係を仮定する．もし，$b \geq a \geq c$ 等と順序関係に変更があれば，両辺を b^{12} で割ればよく，この仮定で一般性を失うことはない．

また，$a > 0$ でないときは，$a = b = c = 0$ となり，このとき与えられた不等式は明らかに等式として成立する（等号成立条件）．さて，

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{b}{a} \leq 1 \\ 0 &< \frac{c}{a} \leq 1 \end{aligned}$$

であるから，

$$1 + (\frac{b}{a})^3 + (\frac{c}{a})^3 \geq 1 + (\frac{b}{a})^4 + (\frac{c}{a})^4 > 0$$

である．従って，

$$\left(1 + (\frac{b}{a})^3 + (\frac{c}{a})^3\right)^3 \geq \left(1 + (\frac{b}{a})^4 + (\frac{c}{a})^4\right)^3$$

から，直ちに (1) 式が示される．以上より不等式の成立が示された．

問題５．（選択）

座標平面上の２点 $A(a,0), B(0,b), (a>0, b>0)$ と原点 O を頂点とする直角三角形のつくる領域を D とします．D 上で一様分布する２次元の確率変数 (X,Y) の相関係数 $\rho(X,Y)$ を求めたいと思います．これを次の (1)〜(3) の手続きに従って計算しなさい．

(1) この確率変数の密度関数 $f(x,y)$ を求めなさい．

(2) 平均 $E(X), E(Y)$ と分散 σ_X^2, σ_Y^2 を求めなさい．

(3) 上記の値を使って，相関係数 $\rho(X,Y)$ を求めなさい．

《解答》

一様分布していることから $f(x,y)=C$(定数) とできる．$\iint_D f(x,y)dxdy = 1$ を満たすことから，

$$\iint_D Cdxdy = C \times (\triangle\ \mathrm{ABC}\ \text{の面積}) = \frac{1}{2}abC$$

より，$f(x,y) = \dfrac{2}{ab}$ と分かる．以下，平均を求める公式に従って，

$$\begin{aligned} E(X) &= \iint_D xf(x,y)dxdy \\ &= \frac{2}{ab}\int_0^a x\ dx \int_0^{-\frac{b}{a}x+b} dy \\ &= \frac{2}{ab}\int_0^a -\frac{b}{a}x^2 + bx\ dx \\ &= \frac{a}{3} \end{aligned}$$

と計算でき，分散は $\sigma_X^2 = E(X^2) - E^2(X)$ により求められるので，

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \iint_D x^2 f(x,y)dxdy \\ &= \frac{2}{ab}\int_0^a x^2\ dx \int_0^{-\frac{b}{a}x+b} dy \\ &= \frac{2}{ab}\int_0^a -\frac{b}{a}x^3 + bx^2\ dx \\ &= \frac{a^2}{6} \end{aligned}$$

より，

$$\sigma_X^2 = \frac{a^2}{6} - (\frac{a}{3})^2 = \frac{a^2}{18}$$

従って，$\sigma_X = \dfrac{a}{\sqrt{18}}$ が得られる．また，Y については a と b を入れ替えればよく，

$$E(Y) = \frac{b}{3},\ \sigma_Y = \frac{b}{\sqrt{18}}$$

である．続いて相関係数は，共分散 σ_{XY} を用いて $\rho(X,Y)=\dfrac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}$ と計算できる．

$$\begin{aligned} E(XY) &= \iint_D xyf(x,y)dxdy \\ &= \frac{2}{ab}\int_0^a x^2\ dx\int_0^{-\frac{b}{a}x+b} y\ dy \\ &= \frac{ab}{12} \end{aligned}$$

より $\sigma_{XY}=E(XY)-E(X)E(Y)=-\dfrac{ab}{36}$ であるから，

$$\rho(X,Y)=-\frac{1}{2}$$

以上.

問題６．（必須）

２つの正方行列 A, B が，

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

と与えられています．このとき零行列でない３行２列の行列 X で

$$AX - XB = 0$$

を満たすものの一例を求めなさい．

《解答》

$X = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$ として力技で解く．

$$\begin{cases} b - c = 3a + 2d \\ e - f = a + 4d \\ -2a + 3b + 2c = 3b + 2e \\ -2d + 3e + 2f = b + 4e \\ -3a + 3b + 2c = 3c + 2f \\ -3d + 3e + 2f = c + 4f \end{cases}$$

を満たさねばならない．

$$\begin{aligned} (\text{第３式}) - (\text{第５式}) : a &= 3(b - c) + 2(e - f) \\ (\text{第４式}) - (\text{第６式}) : d &= (b - c) + 4(e - f) \end{aligned}$$

に第１・２式を代入すると，

$$\begin{aligned} a &= 3(3a + 2d) + 2(a + 4d) \\ d &= (3a + 2d) + 4(a + 4d) \end{aligned}$$

が得られ，直ちに $a = d = 0$ が分かる．これを第１〜６式に代入して条件を書き直すと，

$$\begin{cases} b - c = 0 \\ e - f = 0 \\ 3b + 2c = 3b + 2e \\ 3e + 2f = b + 4e \\ 3b + 2c = 3c + 2f \\ 3e + 2f = c + 4f \end{cases}$$

となり $b = c = e = f$ が分かる．従って，

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とすれば題意を満たす.

問題７．（必須）

底面が半径 r の円で，高さが h である直円柱 R があります．この立体の密度が上面からの距離に比例しているとき，この円柱の重心の位置を求めなさい．

《解答》

直円柱 R の体積 V は，円柱座標 (x,θ,z) を用いて，

$$\begin{aligned} V &= \iiint_R x\ dxd\theta dz \\ (R &: 0\le x\le r,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le z\le h) \end{aligned}$$

で表されるので，質量 m は密度 $\rho=k(h-z)$ を導入して

$$\begin{aligned} m &= \iiint_R \rho x\ dxd\theta dz \\ &= 2\pi k\int x\ dx\int (h-z)\ dz \\ &= \frac{1}{2}k\pi h^2r^2 \end{aligned}$$

と計算できる．従って重心 $\bar{z}$ は，

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{1}{m}\iiint_R z\rho x\ dxd\theta dz \\ &= \frac{1}{m}\cdot 2\pi k\int xdx\int z(h-z)dz \\ &= \frac{h}{3} \end{aligned}$$

である．つまり底面より高さが $h/3$ の中心軸上に重心がある．