実用数学検定１級
第83回１次検定

平成 22 年 5 月 8 日

はじめに

拙稿は私が個人的に趣味で作成した数検の解答案にすぎません．完璧なはずがありません．拙稿で勉強しようなどと横着なことはせず，然るべく教科書で本物の数学を学び，各自数検に挑むようにして下さい．利用の仕方は自由ですが，全て閲覧者の自己責任でお願い致します．

問題１．★

次の整数の中で，最小の数を求めなさい．

$$2^{24}, 3^{15}, 5^{12}, 7^{9}$$

《解答》

指数部分が３の倍数であることにすぐに気づけるので，

$$2^{8}, 3^{5}, 5^{4}, 7^{3}$$

を比較すれば大小関係が分かる．この程度なら力技で十分計算できる．

$$256, 243, 625, 343$$

以上の計算結果より，3^{15} が最小である．

問題２．★★

次の数列は，ある多項式に $f(x)$ に，順次 $x = 1, 2, 3, \cdots$ を代入したときの値です.

$$0 \quad 6 \quad 36 \quad 120 \quad 300 \quad 630 \quad 1176 \quad \cdots$$

もとの多項式を求めなさい.

《解答》

与えられた数列は６の倍数だと気づく．すべて６で割り並べてみると，

$$0 \quad 1 \quad 6 \quad 20 \quad 50 \quad 105 \quad 196 \quad \cdots$$

となり，この数列を a_k とする．特に法則性は見当たらないので，階差数列を試しすことにする.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 5 & 14 & 30 & 55 & 91 & \cdots \\ & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & \cdots \end{array}$$

このように２度階差数列をとることにより法則性が見える．１度目の階差数列を b_k，２度目の階差数列を c_k とする．$c_k = (k+1)^2$ がすぐに分かるので，

$$\begin{aligned} b_k &= 1 + \sum_{i=1}^{k-1} c_i \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{k-1} (i^2 + 2i + 1) \\ &= \frac{1}{6}(2k^3 + 3k^2 + k) \end{aligned}$$

と計算でき，続いて a_k が求まる.

$$\begin{aligned} a_k &= \sum_{i=1}^{k-1} b_i \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{6}(2i^3 + 3i^2 + i) \\ &= \frac{1}{12}k^2(k+1)(k-1) \end{aligned}$$

最初に６で割ったことを考慮すると，求める多項式は $\dfrac{1}{2}k^2(k+1)(k-1)$.

問題３．★★★

a を正の実数，b を実数として $z=a+b\omega$ の形で表わされる複素数 z で，$z^3=3(\omega-\omega^2)$ となるものを $a+b\omega$ の形で求めなさい．ただし，$\omega=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ とし，i は虚数単位です．

《解答》

$$\begin{aligned} z^3 &= 3(\omega-\omega^2) \\ &= 3(2\omega+1) \\ &= 3\sqrt{3}i \\ \therefore\quad z &= \sqrt{3}\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right), -\sqrt{3}i \end{aligned}$$

これを $a+b\omega=a-\dfrac{b}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}bi$ の形に表すので，

(1) $a-\dfrac{b}{2}=\dfrac{3}{2},\quad \dfrac{\sqrt{3}}{2}b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より
$(a,b)=(2,1)$

(2) $a-\dfrac{b}{2}=-\dfrac{3}{2},\quad \dfrac{\sqrt{3}}{2}b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より
$(a,b)=(1,-1)$

(3) $a-\dfrac{b}{2}=0,\quad \dfrac{\sqrt{3}}{2}b=-\sqrt{3}$ より
$(a,b)=(-2,-1)$

以上より，(1) のみが条件を満たし，$2+\omega$ と表せた．

問題4．★

あるくじびきはがきで5等が当たる確率は0.02です．次の問いに答えなさい．

1. このはがきがランダムに n 枚届いたとき，5等が当たる枚数の平均値と標準偏差を計算しなさい．
2. 平均値が標準偏差の2倍よりも大きければ，ほぼ95% の確率で少なくとも1枚当たりになることが期待されます．このようになるのは，はがきが何枚以上届いたときですか．

《解答》

平均値と標準偏差は公式通り求まります．

$$\begin{aligned} \text{平均値} &= 0.02n = \frac{n}{50} \\ \text{標準偏差} &= \sqrt{n \times 0.02(1-0.02)} = \frac{7\sqrt{n}}{50} \end{aligned}$$

よって，平均値が標準偏差の2倍よりも大きいとき，n は

$$\begin{aligned} \frac{n}{50} &> \frac{7\sqrt{n}}{50} \times 2 \\ n^2 &> 49n \times 4 \\ n(n-196) &> 0 \\ n &> 196 \end{aligned}$$

を満たせばよく，197枚以上届いたとき95% の確率で1枚はあたりになると言える．

問題５．★★★

次の４次正方行列 A を考えます．次の問いに答えなさい．

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1. A の固有値を，各々の重複度と合わせて答えなさい．
2. 1. で求めた各々の固有値に属する固有ベクトルを求め，それらを並べた直交行列を求めなさい．

《解答》

形式的に $\det(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{E})=0$ を解けば固有値が求まる．

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \lambda \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -\lambda \end{bmatrix} \\ &= -\lambda(-\lambda^3+\lambda+\lambda)-\lambda(\lambda+\lambda) \\ &= \lambda^2(\lambda+2)(\lambda-2)=0 \end{aligned}$$

よって，固有値は $\lambda = 2, -2, 0$(重解) となる．固有ベクトルは $(A-\lambda E)x=0$ を満たす行列 x であるので，行列 $A-\lambda E$ を簡約化して x の候補（固有空間）を求める．
(1) $\lambda = 2$ のとき

$$A-2E = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{よって}\quad x_1 = \begin{bmatrix} a \\ a \\ a \\ a \end{bmatrix}$$

他の固有値についても，同様の方法で求める．

$$x_2 = \begin{bmatrix} b \\ b \\ -b \\ -b \end{bmatrix}, x_3 = \begin{bmatrix} c \\ -c \\ d \\ -d \end{bmatrix}, x_4 = \begin{bmatrix} e \\ -e \\ -f \\ f \end{bmatrix}$$

これら x_1, x_2, x_3, x_4 を並べたものが直行行列になるために，

$$x_1 \cdot x_2 = 4a^2 = 1, \quad x_3 \cdot x_3 = c^2 + d^2 = 1$$

等を満たす．このような条件全てを満たすには，例えば $a=b=c=d=e=f=\dfrac{1}{2}$ となれば良い．よって，直行行列として

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

等が挙げられる．

問題６．★

曲線 $y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ の，$-1\leq x\leq 1$ の範囲にある部分の長さを求めなさい．

《解答》

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{(dy)^2+(dx)^2}=\int_{-1}^{1}\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1}\,dx$$

の公式にて計算できる.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$$

より,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{e^{2x}+e^{-2x}-2+4}\,dx\\ &= \frac{1}{2}[e^x-e^{-x}]_{-1}^{1}\\ &= e-\frac{1}{e}\end{aligned}$$

以上.

問題７．★

右の図は，一直線上を動くある点について，時間 t と速度 v との関係を示すグラフです．この点が $t=0$ のとき原点にいたとして，時間 t と直線上を動く点の原点からの距離 x との関係を示すグラフの概形を描きなさい．