実用数学検定１級
第80回１次検定

平成 22 年 5 月 8 日

はじめに

拙稿は私が個人的に趣味で作成した数検の解答案にすぎません．完璧なはずがありません．拙稿で勉強しようなどと横着なことはせず，然るべく教科書で本物の数学を学び，各自数検に挑むようにして下さい．利用の仕方は自由ですが，全て閲覧者の自己責任でお願い致します.

問題 1．★★★

$\dfrac{10^{30}}{1002}$ を小数で表したとき，一の位を求めよ．

《解答》

(mod 1002) として，以下の計算が実行出来る．

$$
\begin{aligned}
10^3 &\equiv -2 \pmod{1002} \\
10^{30} &\equiv (-2)^{30} \equiv 22 \\
10^{30} - 22 &\equiv 0
\end{aligned}
$$

よって，$10^{30} - 22$ は 1002 で割り切れることが分かった．

$$10^{30} - 22 = 1002X$$

なる自然数 X が存在し，両辺 (mod 10) を考えると，

$$
\begin{aligned}
-22 &\equiv 2X \pmod{10} \\
9 &\equiv X
\end{aligned}
$$

従って，X の 1 の位は 9 である．

$$
\begin{aligned}
\frac{10^{30}}{1002} - \frac{22}{1002} &= X \\
\frac{10^{30}}{1002} &= X + \frac{22}{1002}
\end{aligned}
$$

だが，$\dfrac{22}{1002} < 1$ なので，$\dfrac{10^{30}}{1002}$ の 1 の位も 9 である．

問題２．★

$(x-1)^7-(x^7-1)$ を実数係数の範囲で因数分解せよ．

《解答》

数式を睨むと，$(x-1)$ で割れることに気がつく．先ず，$(x-1)$ を括りだしてみると，

$$(\text{与式})=(x-1)\{(x-1)^6-(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)\}$$

となる．続いて，$x=0$ を代入してみると，x を約数に持つことが分かる．内を整理して x を括りだす．６乗の展開公式はパスカルの三角形による．

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= (x-1)(-7x^5+14x^4-21x^3+14x^2-7x) \\ &= -7x(x-1)(x^4+-2x^3+3x^2-2x^1+1)\end{aligned}$$

最後のカッコ内 $(x^4+-2x^3+3x^2-2x^1+1)$ の係数に見覚えがあることが望ましい．見覚えがなくても，係数が対称的なので因数分解できそうだと判断する．

$$(\text{与式})=-7x(x-1)(x^2-x+1)^2$$

以上．

問題３．★★★

五角形 ABCD がります．その５本の辺と５本の対角線の合計１０本の線分から，ランダムに４本選び，選ばれた線分の両端をそれに沿ってつなぎます．この操作によって，５頂点 A,B,C,D がすべてつながるようになる確率を求めなさい．

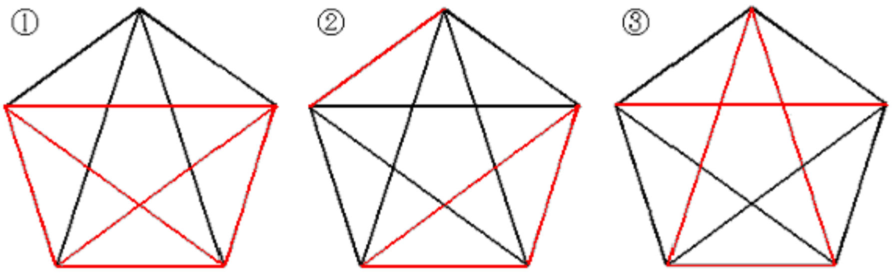
《解答》

10 本から 4 本を選ぶので，$_{1}0C_4 = 210$ 通り考えられます．すべての点がつながる確率を求めるために，その排反事象の確率を求めることにします．

下の ▪ 〜 ▪ のパターンが考えられる．それぞれ場合の数を求めると，

1. $_6C_4 \times 5 = 75$ 通り
2. 5 通り
3. 5 通り

以上 85 通りと分かる．求める確率は $1 - \dfrac{85}{210} = \dfrac{25}{42}$.



問題４．★★

複素数の累乗は α^β は，指数関数を exp，自然対数関数を log と表すとき，$\exp(\beta \cdot \log\alpha)$ で定義されます．i を虚数単位とするとき，i^i を計算しなさい．

《解答》

n を整数とする．

$$i = \cos(\pi/2 + 2n\pi) + i\sin(\pi/2 + 2n\pi) = e^{i(\pi/2+2n\pi)}$$

この両辺を i 乗すれば良い．

$$\begin{aligned} i^i &= e^{i(\pi/2+2n\pi)^i} \\ &= e^{-\pi/2-2n\pi} \\ &= e^{-\pi/2+2n\pi} \end{aligned}$$

以上．

問題５．★

数列 a_n が，次の漸化式によって定義されています.

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{2^{n+1}a_n}{2^n + a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

このとき，次の問いに答えなさい.

1. $b_n = \dfrac{2^n}{a_n}$ とおくとき，b_{n+1} を b_n で表す漸化式を求めなさい.
2. 1. の結果を利用して，a_n を n の式で表しなさい.

《解答》

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{2^{n+1}}{\frac{2^n}{a_n} + 1} \\ \frac{a^{n+1}}{2^{n+1}} &= \frac{1}{\frac{2^n}{a_n} + 1} \\ \frac{2^{n+1}}{a^{n+1}} &= \frac{2^n}{a_n} + 1 \\ b_{n+1} &= b_n + 1 \end{aligned}$$

以上，b_n の漸化式が出来た．これを解いて，b_n を求める.

$$\begin{aligned} b_n &= b_{n-1} + 1 \\ &= b_1 + (n-1) \\ &= \frac{2^1}{a_1} + (n-1) \\ &= n + 1 \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} \frac{2^n}{a_n} &= n + 1 \\ a_n &= \frac{2^n}{n+1} \end{aligned}$$

一般項が求まる.

問題６．★

３次元空間を２次元空間（平面）に移す１次変換 T があります．T によって，３本のベクトル

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

を移すと，それぞれベクトル $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ に移りました．この１次変換 T を表す行列を求めなさい．

《解答》

$T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix}$ とおける．実際にこの行列の１行目を作用させると，

$$\begin{cases} 4a + c = 3 \\ 2a + 2b + 2c = 2 \\ a + 4c = 1 \end{cases}$$

を得る．これを解くと，$a = 11/15, b = 1/5, c = 1/15$ と分かる．続いて，２行目を計算すればよいが，変換後の行列 $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ の１行目，２行目の対応から，$T = 15\begin{pmatrix} 11 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 11 \end{pmatrix}$ が分かる．以上．

問題７．★★★

次の問いに答えなさい．

1. ２階常微分方程式 $y'' = y$ を，初期条件 $y(0) = 3, y'(0) = -1$ の下で解きなさい．
2. 1. で求めた解のグラフの概形をかきなさい．x の変域は，$x > 0, x < 0$ の両側にわたります．

《解答》

$y'' - y = 0$ と変形し，特性方程式 $x^2 - x = 0$ の解 $x = \pm 1$ を求めると，一般解は $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ で表わされる．$y' = C_1 e^x - C_2 e^{-x}$ であるから初期条件より，$C_1 = 1, C_2 = 2$ を得る．
よって，$y = e^x + 2e^{-x}$ である．グラフの概形は以下に示す．

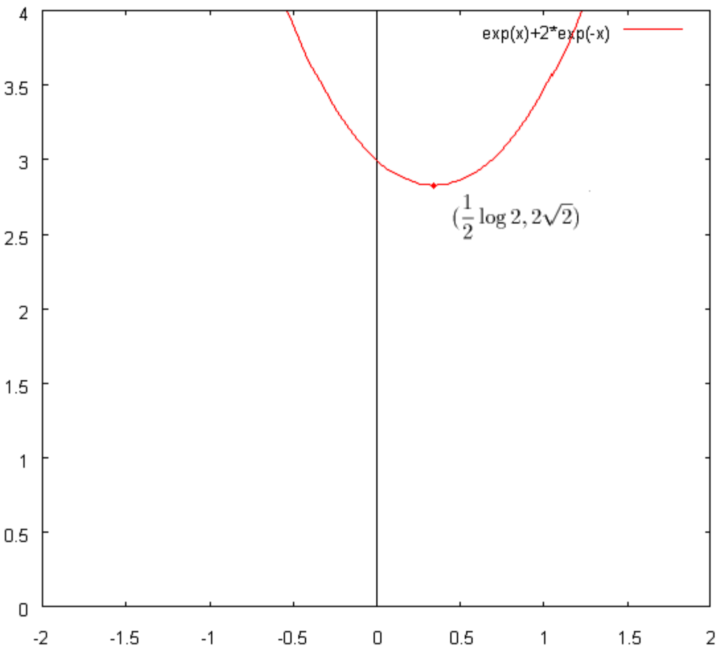


図 1: $y = e^x + 2e^{-x}$ のグラフ