実用数学検定１級
第76回１次検定

平成22 年5 月8 日

はじめに

拙稿は私が個人的に趣味で作成した数検の解答案にすぎません．完璧なはずがありません．拙稿で勉強しようなどと横着なことはせず，然るべく教科書で本物の数学を学び，各自数検に挑むようにして下さい．利用の仕方は自由ですが，全て閲覧者の自己責任でお願い致します.

問題 1．★★

p が素数のとき，p の倍数でない整数 n に対して，$n^{p-1}-1$ は p で割り切れます（フェルマーの小定理．これを証明する必要はありません.）

さて，2003 は素数です．2^{2000} を 2003 で割った余りを，上の定理を活用して計算しなさい．

《解答》

フェルマーの小定理より，$2^{2000}-1 \equiv 0 \pmod{2003}$ である．求める余りを X とすると，

$$\begin{aligned} 2^{2000} &\equiv X \qquad \pmod{2003} \\ 2^{2002} &\equiv 2^2 X \qquad \pmod{2003} \\ 2^{2002}-1 &\equiv 2^2X-1 \equiv 0 \qquad \pmod{2003} \\ \therefore 4X-1 &= 2003n \quad (n=0,1,2,\cdots) \\ \therefore X &= \frac{1}{4}(2003n+1) \end{aligned}$$

を得る．X が 2003 より小さい自然数であることから，上の式を満たすのは $n=1$ のときのみである．以上より，$X=501$.

教訓

フェルマーの小定理は，数論及び代数のテキストでお目にかかるであろう．が，一般に覚えておく必要はない．本問の核は modulo 演算である．

$$A \equiv B \pmod{C}$$

なる式は，A と B は C を法として合同であると読み，要するに，A と B は C で割った時の余りが同じという主張である．

$$\begin{aligned} 0 &\equiv 3 \equiv 6 \equiv \cdots \pmod{3} \\ 1 &\equiv 6 \equiv 11 \equiv \cdots \pmod{5} \end{aligned}$$

等を見れば一目瞭然であろう．

問題２．★★★

n が定まった正の整数であるとき，次の連立方程式を解きなさい．

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+\cdots+(n-1)x_{n-1}+nx_n=1 \\ x_2+2x_3+3x_4+\cdots+(n-1)x_n+nx_1=2 \\ x_3+2x_4+3x_5+\cdots+(n-1)x_1+nx_2=3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_k+2x_{k+1}+\cdots+(n-k+1)x_n+(n-k+2)x_1+\cdots+nx_{k-1}=k \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n+2x_1+3x_2+\cdots+(n-1)x_{n-2}+nx_{n-1}=n \end{cases}$$

《解答》

拡大係数行列にて解答する．

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 & 2 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-2 & 3 \\ \cdots & & & & \cdots & \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 & n \end{array}\right)$$

これを行基本変形により簡略化する．以下，$k=1,\cdots,n-1$ として k 行目から $k+1$ 行目を引き，n 行目に全ての k 行を加える．

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & -1 \\ \cdots & & & & \cdots & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{array}\right)$$

各 k 行から n 行を引く．

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -n & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 \\ 0 & -n & 0 & \cdots & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -n & \cdots & 0 & -2 \\ \cdots & & & & \cdots & \\ \cdots & & & & \cdots & -2 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{array}\right)$$

各 k 行より，$x_k=\dfrac{2}{n}$ が分かる．このとき，n 行から

$$\begin{aligned} \frac{2}{n}(n-1)+x_n &= 1 \\ x_n &= \frac{2}{n}-1 \end{aligned}$$

を得る．

問題３．★★

大小２個のさいころを１００回振り，出た目の積が偶数になる回数を X とします．X を確率変数として，次の問いに答えなさい．

1. X の平均値（期待値）を求めなさい．
2. X の標準偏差を求めなさい．

《解答》

１回のベルヌーイ試行で，出た目の積が偶数になる確率 p は，$p = 1 - (1/2)^2 = 3/4$ である．公式を用いると，

$$\begin{aligned}(\text{期待値}) &= 100 \times \frac{3}{4} = 75 \\ (\text{標準偏差}) &= \sqrt{100 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}} = \frac{5\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

を得る．

教訓

成功確率 p，試行回数 n のベルヌーイ試行において，成功回数 X に着目すると，その平均・分散は，

$$\begin{aligned}E(X) &= np \\ V(X) &= np(1-p)\end{aligned}$$

なることが本問の核で，直ちに解答が得られる．数検対策で覚えておこうというのでは数学嫌いを増やすだけである．この機会に導出過程を眺めておこう．重要な役割を果たす次の計算を確認しておこう．

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} &= 1 \\ x\binom{n}{x} &= x\frac{n!}{x!(n-x)!} \\ &= n\frac{(n-1)!}{(x-1)!\{(n-1)-(x-1)\}!} \\ &= n\binom{n-1}{x-1}\end{aligned}$$

これらを踏まえて，平均は，

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^{n} x \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \sum_{x=1}^{n} n \begin{pmatrix} n-1 \\ x-1 \end{pmatrix} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= np \sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{(n-1)-k} \;=\; np \end{aligned}$$

続いて分散だが，その前に

$$\begin{aligned} E[X(X-1)] &= \sum_{x=0}^{n} x(x-1) \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \sum_{x=2}^{n} n(n-1) \begin{pmatrix} n-2 \\ x-2 \end{pmatrix} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= n(n-1)p^2 \sum_{k=0}^{n-2} x(x-1) \begin{pmatrix} n-2 \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{(n-2)-k} \\ &= n(n-1)p^2 \end{aligned}$$

を計算しておくと後々楽で，

$$\begin{aligned} V(X) &= E[\{X - E(X)\}^2] \\ &= E[X(X-1) + \{1 - 2E(X)\}X + E(X)^2] \\ &= n(n-1)p^2 + (1-2np)np + (np)^2 \\ &= np(1-p) \end{aligned}$$

を得る．

問題4．★★

下の行列について，次の問いに答えなさい．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. 行列 A の固有方程式を求めなさい．
2. 行列 A の固有値（固有方程式の解）を求めなさい．

《解答》

$|A-\lambda E|=0$ を解けばよい．余因子展開で次数を下げればそれほど時間はかからない．

$$\begin{aligned} |A-\lambda E| &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda(\lambda^2-1)(\lambda^2-3) \end{aligned}$$

よって固有値 $\lambda = 0, \pm 1, \pm\sqrt{3}$ を得る．

教訓

正方行列 A に対して，ある零でないベクトル $\boldsymbol{v}$ が，

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} \qquad (\lambda\text{は定数})$$

を満たすとき，$\boldsymbol{v}$ を固有ベクトル，λ を固有値というのである．上式は，

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{v} &= \lambda E\boldsymbol{v} \\ (A-\lambda E)\boldsymbol{v} &= 0 \end{aligned}$$

と変形でき，$\boldsymbol{v}$ が零ベクトルでないことから，行列 $A-\lambda E$ は逆行列を持たぬことが分かる．もし $(A-\lambda E)^{-1}$ が存在すれば，これを両辺の左から掛けると，$\boldsymbol{v}=0$ となってしまうからである．$A-\lambda E$ が逆行列を持たぬための必要十分条件は

$$|A-\lambda E| = 0$$

で，これを固有方程式というのである．

問題５．★

$f(x)=\sqrt{1-x}$ を $x=0$ においてテイラー展開して，x^4 の項までを求めなさい．

《解答》

微分していくと簡単な法則に気づく．

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{1}{2}(1-x)^{-1/2}, \quad f'(0)=-\frac{1}{2} \\
f''(x) &= -\frac{1}{4}(1-x)^{-3/2}, \quad f''(0)=-\frac{1}{4} \\
f'''(0) &= -\frac{3}{8} \\
f^{(4)}(0) &= -\frac{15}{16}
\end{aligned}
$$

よって，展開は，

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4\cdot 2!}x^2-\frac{3}{8\cdot 3!}x^3-\frac{15}{16\cdot 4!}x^4 \\
&= 1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4
\end{aligned}
$$

以上．

教訓

本問のテイラー展開

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

は必須の知識である．この展開は簡単に言うと，

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$$

という具合に，あらゆる関数を代数関数で近似しようという試みなのである．テイラー展開の公式とは定式の係数 a_i の導出に他ならないのである．a_0 はすぐに分かる．$x=0$ を両辺に代入すれば良い．

$$f(0)=a_0+a_10+a_20^2+a_30^3+\cdots=a_0$$

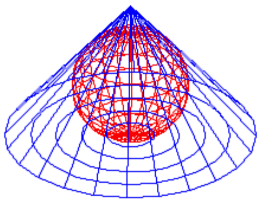
a_1 は両辺を微分して，$x=0$ とする．

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots \\
f'(0) &= a_1
\end{aligned}
$$

つまり，a_i は両辺を i 回微分して $x=0$ とすれば得られるのである．

問題６．★★★

下図ような，半径が一定値 r の球に外接する直円錐があります．すなわち円錐の側面と底面が球に外接します．このような直円錐のうち体積が最小のものを求め，その体積と内接する球の体積との比を最も簡単な形にして答えなさい．



《解答》

図のように円に接する直線を考え，これを y 軸を中心に回転して得られる円錐を求める円錐とみなす．また，計算を簡単にするため球の半径 $r=1$ と考える．まず図の a,b の値を求める．

$$a = \frac{1}{\cos\theta}(1+\sin\theta)$$
$$b = \frac{1}{\sin\theta}(1+\sin\theta)$$

となる．求める円錐の体積は $\pi/3\cdot a^2 b$ と表せる．これを θ の関数とみなし，その極小値を求めることが題意である．

$$\frac{d}{d\theta}(a^2 b) = 2aba' + a^2 b' = a(2ba' + ab')$$

を $2aba' + a^2 b'$ で表せばよい．

$$a' = \frac{1}{\cos^2\theta}(1+\sin\theta)$$
$$b' = -\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

であるので，

$$(a^2 b) = \frac{(1+\sin\theta)^2}{\sin^2\theta\cos^2\theta}(3\sin\theta-1)(\sin\theta+1)$$

となる．よって，$\sin\theta = 1/3$ のとき円錐の体積が最小になる．このとき，$a=\sqrt{2}, b=4$ である．

$$\text{円錐の体積} = \frac{8\pi}{3}r^3$$
$$\text{円錐 : 球} = 2:1$$

以上．

問題7．★★

n を正の整数とするとき，定積分 $\displaystyle\int_0^1 (\log_e x)^n dx$ の値を n に関する式で求めなさい．

《解答》

部分積分法により，

$$(\text{与式}) = [x(\log x)^n]_0^1 - n\int_0^1 (\log x)^{n-1}dx$$

と変形できる．第 1 項が 0 になるので，部分積分法を繰り返すことで解けるが，念のため，第 1 項に関して補足しておく．

先ず，$\displaystyle\lim_{x\to 1} x(\log x)^n = 0$ は明らかだが，$\displaystyle\lim_{x\to 0} x(\log x)^n = 0$ はそれ程明らかでない．ここでは，$n = 2$ について証明しておく．

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} x(\log x)^2 &= \lim_{x\to 0} \frac{(\log x)^2}{1/x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2\log x \cdot 1/x}{-x^{-2}} = \lim_{x\to 0} \frac{2\log x}{-1/x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2/x}{x^{-2}} = \lim_{x\to 0} 2x = 0
\end{aligned}$$

このように，ロピタルの定理を用いると n が有限である限り，0 となる様子が見える．よって，与式を部分積分法で展開していくと，

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= n(n-1)\int_0^1 (\log x)^{n-2}dx \\
&= -n(n-1)(n-2)\int_0^1 (\log x)^{n-3}dx \\
&= (-1)^n n!
\end{aligned}$$

以上.