実用数学検定 1 級
第 197 回 1 次検定

平成 22 年 12 月 14 日

はじめに

拙稿は私が個人的に趣味で作成した数検の解答案にすぎません．完璧なはずがありません．拙稿で勉強しようなどと横着なことはせず，然るべく教科書で本物の数学を学び，各自数検に挑むようにして下さい．利用の仕方は自由ですが，全て閲覧者の自己責任でお願い致します.

問題１．★★

正の整数 x, y に対して

$$331 = x^3 - y^3$$

を満たす x, y の値を求めなさい．

《解答》

$331 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$ より，$x-y$ が 331 の約数と分かるが，これが探しても見つからない．仕方なく $x-y=1$ としてみると，

$$\begin{aligned}(y-1)^3 - y^3 &= 331\\ y^2 + y - 110 &= 0\\ y &= 10\end{aligned}$$

よって，$(x, y) = (11, 10)$．

問題２．★★

次の式を係数が整数の範囲で因数分解しなさい．

$$x^6 - 14x^4 + 17x^2 - 4$$

《解答》

$x^2 = X$ とおき，

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= (X-1)(X^2-13X+4)\\ &= (x+1)(x-1)(x^4-13x^2+4)\end{aligned}$$

まではすぐに分解できる．３つ目の括弧があやしいので，

$$x^4 - 13x^2 + 4 = (x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$$

とおいて，係数比較すると

$$\begin{cases} a+c=0 \\ ac+d+b=-13 \\ c(-d+b)=0 \\ bd=4 \end{cases}$$

が分かる．これを解くと，

$$(a,b,c,d) = (-3,-2,3,-2)$$

となる（一意的には決まらない）．故に

$$(x+1)(x-1)(x^2-3x-2)(x^2+3x-2)$$

問題３．★★

次の級数が収束するような実数 x の範囲を求めなさい．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt[3]{n}} x^n$$

《解答》

収束半径の知識から，

$$\frac{3^{n+1}}{\sqrt[3]{n+1}} x^{n+1} \Big/ \frac{3^n}{\sqrt[3]{n}} x^n = \frac{3x}{\sqrt[3]{\frac{n+1}{n}}} \to 3x \ (n \to \infty)$$

を計算し，$|x| < 1/3$ のとき収束することが分かる．$x = \pm 1/3$ のときは個別に調べる必要があり，$x = 1/3$ のとき，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

右辺が発散することから，元も級数も発散する．$x = -1/3$ のとき，

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}} \right| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2k}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2k-1}} \right| \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2k-1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2k}} \\
&< \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2k-1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2k+1}} = 1
\end{aligned}$$

より，元の級数の収束が分かる．収束範囲は $-1/3 \leq x < 1/3$.

問題４．★★

3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ の固有値をそれぞれ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ とするとき，次の問に答えなさい.

1. $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ の値を求めなさい.

2. ${\lambda_1}^2 + {\lambda_2}^2 + {\lambda_3}^2$ の値を求めなさい.

《解答》

行列の固有多項式 $|A - \lambda E|$ は,

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & -1 \\ -2 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 3 & -3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 - \lambda - 24 \end{aligned}$$

なので，$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ は，$x^3 + x + 24 = 0$ の解と考えられる．解と係数の関係より

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = 1 \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -24 \end{cases}$$

これを利用すると,

$$\begin{aligned} {\lambda_1}^2 + {\lambda_2}^2 + {\lambda_3}^2 &= (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1) \\ &= -2 \end{aligned}$$

問題５．★★★

２個のさいころ A，B があります．これらは立方体の形をしており，それぞれのさいころの各面について

A のさいころには，$-4, -2, 0, 2, 4, 6$
B のさいころには，$-8, -5, 2, 4, 5, 8$

の数字が書かれています．これら２個のさいころを同時に１回だけ振るとき，出る目の数の和を X とします．このとき，次の問に答えなさい．ただし，それぞれのさいころについて，各面の出る確率はすべて $\dfrac{1}{6}$ であるとします．

1. X の平均（期待値）を求めなさい．
2. X の分散を求めなさい．

《解答》

全ての場合を考えると，各面が 6 回ずつ出るので，全ての数字を合計し 6 で割れば，期待値を得る．$E(X) = 2$.

続いて分散は $E(X^2) - E(X)^2$ を利用して，面倒だが X^2 の値を全て足し合わせる．

$$E(X^2) = \frac{1}{36}\{(144 + 81 + \cdots = \frac{143}{3}$$

よって，分散は $V(X) = \dfrac{143}{3} - 4 = \dfrac{131}{3}$.

問題６．★★★★

次の定積分を求めなさい．

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x} dx$$

《解答》

$t = \sqrt{\tan x}$ とおくと，$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{\tan x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$ で，

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int_0^\infty t \cdot 2t \cdot \cos^2 x \, dt \\ &= 2\int_0^\infty \frac{t^2}{t^4+1} dt\end{aligned}$$

となり，第 137 回の問題 7 を思い出し，

$$\frac{x^2+1}{x^4+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)$$

を使えば解けそうだが，ここでは留数定理を使ってしまおう．

$$\begin{aligned}2\int_0^\infty \frac{t^2}{t^4+1} dt &= \int_{-\infty}^\infty \frac{t^2}{t^4+1} dt \\ &= 2\pi i \sum_{j=1}^2 \frac{a_j}{4{a_j}^3} \\ &= \frac{\pi i}{2}\left(\frac{1}{1/\sqrt{2}+1/\sqrt{2}i} + \frac{1}{-1/+1/i}\right) \\ &= -\frac{\pi i}{2} \cdot \sqrt{2}i \;=\; \frac{\pi}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

ただし，a_j は $t^4+1=0$ が上半平面に持つ根．

問題7．★★★

次の微分方程式を解きなさい．

$$\frac{dy}{dx} - 4y = \sin 2x$$

《解答》

先ず，$\frac{dy}{dx} - 4y = 0$ を解くと，$y = ce^{4x}$ が得られる．$y = u(x)e^{4x}$ として，元の微分方程式に代入すると，

$$\begin{aligned} u'(x)e^{4x} + 4u(x)e^{4x} - 4u(x)e^{4x} &= \sin 2x \\ u'(x) &= e^{-4x}\sin 2x \end{aligned}$$

を得る．$u(x)$ を求めるために $u(x)$ を虚部に持つ複素関数

$$V(x) = v(x) + iu(x)$$

を導入し，微分作用子の線型性を考慮し，

$$\begin{aligned} V'(x) &= v'(x) + iu'(x) \\ &= e^{-4x}\cos 2x + ie^{-4x}\sin 2x \\ &= e^{(-4+2i)x} \end{aligned}$$

を解く．

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{e^{(-4+2i)x}}{-4+2i} \\ &= \frac{e^{-4x}}{20}(\cos 2x + i\sin 2x)(-4-2i) \\ &= \frac{e^{-4x}}{20}\{(-4\cos 2x + 2\sin 2x) + i(-4\sin 2x - 2\cos 2x)\} \end{aligned}$$

この虚部が $u(x)$ であったので，

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{e^{-4x}}{10}(-2\sin 2x - \cos 2x) + C \\ \therefore y &= \frac{1}{10}(-2\sin 2x - \cos 2x) + Ce^{4x} \end{aligned}$$