実用数学検定１級
第190回１次検定

平成22年8月24日

はじめに

拙稿は私が個人的に趣味で作成した数検の解答案にすぎません．完璧なはずがありません．拙稿で勉強しようなどと横着なことはせず，然るべく教科書で本物の数学を学び，各自数検に挑むようにして下さい．利用の仕方は自由ですが，全て閲覧者の自己責任でお願い致します．

問題１．★★★

15^{2010} を 128 で割った時の余りを正の数で答えなさい.

《解答》

$15^k \equiv 1 \pmod{128}$ なる自然数 k を探すと，$k=8$ が見つかる．従って，

$$\begin{aligned} 15^{2010} &\equiv 15^2 \\ &\equiv 225 \equiv 97 \pmod{128} \end{aligned}$$

問題２．★★

次の x, y に関する２次式を係数が実数の範囲で因数分解しなさい．

$$x^2 - 7xy + 11y^2 + 3x - 8y + 1$$

《解答》

ともかく定数項があることから，$(x + ky)$ みたいな有難い因数を持たないことが分かる．仕方なく

$$(x + \alpha y + \alpha')(x + \beta y + \beta')$$

と因数分解できたとする．展開すると，

$$x^2 + (\alpha + \beta)xy + \alpha\beta y^2 + (\alpha' + \beta')x + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)y + \alpha'\beta'$$

となるので，係数比較

$$\begin{cases} \alpha\beta = 11 \\ \alpha + \beta = -7 \end{cases}$$

により，$(\alpha, \beta) = (\frac{-7 \pm \sqrt{5}}{2}, \frac{-7 \mp \sqrt{5}}{2})$ を得る．また別の係数比較

$$\begin{cases} \alpha' + \beta' = 3 \\ \alpha'\beta' = 1 \end{cases}$$

より，$(\alpha', \beta') = (\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, \frac{3 \mp \sqrt{5}}{2})$ を得る．これらの組み合わせで，最後の係数比較

$$\alpha\beta' + \alpha'\beta = -8$$

を満たすものを探すと，

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) &= (\frac{-7 + \sqrt{5}}{2}, \frac{-7 - \sqrt{5}}{2}) \\ (\alpha', \beta') &= (\frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3 + \sqrt{5}}{2}) \end{aligned}$$

が条件を満たす.

問題３．★★

全ての実数 x について，$-\dfrac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \dfrac{\pi}{2}$ とするとき，次の値を求めなさい.

$$\tan^{-1} 1 + \tan^{-1} 2 + \tan^{-1} 3$$

《解答》

$\tan^{-1} 1 = a, \tan^{-1} 2 = b, \tan^{-1} 3 = c$ とおくと $a+b+c$ を求めることが目標である．この手の問題は加法定理を使うのが定石.

$$\tan a = 1, \tan b = 2, \tan c = 3$$

なので,

$$\begin{aligned}
\tan(a+b) &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} = \frac{3}{1-2} = -3 \\
\tan(a+b+c) &= \frac{\tan(a+b) + \tan c}{1 - \tan(a+b)\tan c} = \frac{-3+3}{1+9} = 0 \\
&\therefore \quad a+b+c = n\pi
\end{aligned}$$

を得るが，$-\dfrac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \dfrac{\pi}{2}$ より,

$$0 < a+b+c < \frac{3}{2}\pi$$

がすぐに分かる．従って，$a+b+c = \pi$.

問題４．★

3次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき，次の問に答えなさい．

1. E を3次の単位行列とする．行列 $xE - A$ の行列式を x の整式で表しなさい．

2. $2A^5 - 23A^3 + 4A^2 + 9A$ を計算しなさい．

《解答》

$$\begin{aligned} |xE - A| &= \begin{vmatrix} x-1 & -2 & 2 \\ -3 & x+2 & 1 \\ 1 & 0 & x-1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ x+2 & 1 \end{vmatrix} + (x-1) \begin{vmatrix} x-1 & -2 \\ -3 & x+2 \end{vmatrix} \\ &= x^3 - 11x + 2 \end{aligned}$$

より，$A^3 - 11A + 2E = 0$ が成立する．これにより次数下げを行い，

$$\begin{aligned} 2A^5 - 23A^3 + 4A^2 + 9A &= 2A^2(11A - +2E) - 23(11A - 2E) + 4A^2 + 9A \\ &= 22(11A - 2E) - 244A + 46E \\ &= -2A + 2E = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ -6 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と計算できる．

問題５．★★

次の問に答えなさい.

1. $\dfrac{1}{n^2(n+1)^2}$ を部分分数分解しなさい.

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2}$ の値を求めなさい．ただし，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ を用いても構いません.

《解答》

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^2(n+1)^2} &= \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)^2 \\
&= \frac{1}{n^2}-\frac{2}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)^2} \\
&= \frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{2}{n}+\frac{2}{n+1} \\
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{\pi^2}{6}+\frac{\pi^2}{6}-1+2(-1) \\
&= \frac{\pi^2}{3}-3
\end{aligned}$$

問題６．★

確率変数 X が平均 30，分散 100 の正規分布に従うとき，$P(23 \leq X \leq 48)$ の値を下の表の値を用いて計算しなさい．ただし，下の表は確率変数 Z が平均 0，分散 1 の正規分布に従うときの $P(0 \leq Z \leq \alpha)$ の値を表します．

α	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$P(0 \leq Z \leq \alpha)$	0.0398	0.0793	0.1179	0.1554	0.1915	0.2257	0.2580	0.2881	0.3159	0.3413

α	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
$P(0 \leq Z \leq \alpha)$	0.3643	0.3849	0.4032	0.4192	0.4332	0.4452	0.4554	0.4641	0.4713	0.4772

α	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
$P(0 \leq Z \leq \alpha)$	0.4821	0.4861	0.4893	0.4918	0.4938	0.4953	0.4965	0.4974	0.4981	0.4987

《解答》

表が使えるように，X に変換を施す．

$$Z = \frac{X - 30}{\sqrt{100}}$$

より，$-0.7 \leq Z \leq 1.8$ が分かるので，

$$\begin{aligned} P(23 \leq X \leq 48) &= P(-0.7 \leq Z \leq 1.8) \\ &= 0.2580 + 0.4641 \\ &= 0.7221 \end{aligned}$$

と計算できる．

問題７．★★★

３次元の単位級 $\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ を D で表します．このとき，３重積分

$$\iiint_D x^2+y^2 \; dxdydz$$

を求めなさい．

《解答》

極座標 $x = r\sin\theta\cos\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\cos\theta$ $(0 \leq r, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi)$ を利用する．積分範囲は,

$$D' = \{0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \phi \leq \pi/2\}$$

を考え，8 倍すれば良かろう．

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= 8\iiint_{D'} r^2\sin^2\theta \cdot r^2\sin\theta \; drd\theta d\phi \\ &= 8\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{2} \;=\; \frac{8}{15}\pi\end{aligned}$$

なお，$I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$ が,

$$\begin{cases} n \text{ が偶数なら}, I_n = \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2} \\ n \text{ が奇数なら}, I_n = \dfrac{(n-1)!!}{n!!} \end{cases}$$

であることを利用した．