実用数学検定１級
第184回１次検定

平成22 年5 月9 日

はじめに

拙稿は私が個人的に趣味で作成した数検の解答案にすぎません．完璧なはずがありません．拙稿で勉強しようなどと横着なことはせず，然るべく教科書で本物の数学を学び，各自数検に挑むようにして下さい．利用の仕方は自由ですが，全て閲覧者の自己責任でお願い致します.

問題１．★★

次の分数は約分できますか．できるならば，約分してもっとも簡単な分数で表し，できないならば「約分できない」と答えなさい．

$$\frac{10033}{12877}$$

《解答》

分母，分子の引き算により，目ぼしを付ける．

$$\begin{aligned} 12877 - 10077 &= 2844 \\ &= 4 \times 3^2 \times 79 \end{aligned}$$

4 と 3 は明らかに分母，分子を割らないので，79 で約分できることが分かる．割り算を実行し，

$$\frac{127}{163}$$

を得る．標語的には，ユークリッドの互除法を利用すれば良い．

問題２．★★

x の３次方程式 $x^3+2x^2+4x+7=0$ の３つの複素数解を α, β, γ とするとき，$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$ の値を求めなさい．

《解答》

解と係数の関係より，

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=-2 \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4 \\ \alpha\beta\gamma=-7 \end{cases}$$

が分かる．

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2=\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+2(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2) \tag{1}$$

が利用できるであろう．先ず，

$$\begin{aligned} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 &= (\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) \\ &= 4-2\cdot 4 \;=\; -4 \end{aligned}$$

続いて，

$$\begin{aligned} (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2 &= \alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma) \\ \therefore\quad \alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2 &= 4^2-2\cdot(-7)\cdot(-2) \;=\; -12 \end{aligned}$$

が分かるので，(1) 式に代入して，

$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=(-4)^2-2\cdot(-12)=40$$

を得る．

問題３．★

２つのベクトル $\boldsymbol{a} = (1, 2, 3)$ と $\boldsymbol{b} = (1, -1, 2)$ に対して，外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を求めなさい.

《解答》

ノーコメント.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \;=\; \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} &= i(4+3) + j(3-2) + k(-3) \\
&= 7i + j - 3k \\
&= (7, 1, -3)
\end{aligned}$$

以上.

問題４．★★

次の行列式を計算しなさい．

$$\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix}$$

《解答》

単純に展開・整理する．

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= (b^2+c^2)(a^4+a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2-b^2c^2) \\
&\qquad + \ ab(abc^2-a^3b-ab^3)+ca(ab^2c-ac^3-a^3c) \\
&= a^2\{(b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2) \\
&\qquad + \ (b^2c^2-a^2b^2-b^4+b^2c^2-c^4-a^2c^2)\} \\
&= a^2(a^2b^2+a^2c^2+b^4+b^2c^2+b^2c^2+c^4 \\
&\qquad + \ b^2c^2-a^2b^2-b^4+b^2c^2-c^4-a^2c^2) \\
&= 4a^2b^2c^2
\end{aligned}$$

問題５．★★

確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(ax - x^2) & (0 \leq x \leq a) \\ 0 & (x < 0, a < x) \end{cases}$$

で与えられるとき，次の問に答えなさい．ただし，a は正の定数であるとします.

(1) a の値を求めなさい.

(2) (1) で求めた a に対して X の分散を求めなさい.

《解答》

$-\infty$ から ∞ までの積分が 1 になることを利用すれば良い.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \int_0^a \frac{3}{4}(ax - x^2)dx \\ &= \frac{3}{4}\int_0^a ax - x^2 \ dx \\ &= \frac{3}{4}\left[\frac{a}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^a \\ &= \frac{3}{4}\left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3}\right) \ = \ \frac{a^3}{8} \end{aligned}$$

よって，$a = 2$ と分かる．続いて，分散は $E(X^2) - E(X)^2$ により求まるので，先ず X と X^2 の平均値を求める.

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^2 xf(x) \ dx \ = \ \int_0^2 \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3 \ dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{10}x^4\right]_0^2 \ = \ 1 \\ E(X^2) &= \int_0^2 \frac{3}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^4 \ dx \\ &= \left[\frac{3}{8}x^4 - \frac{3}{20}x^5\right]_0^2 \ = \ \frac{6}{5} \end{aligned}$$

よって，分散は

$$\frac{6}{5} - 1^2 = \frac{1}{5}$$

となる.

問題６．★

$w = \log_e(x^2 + y^2 + z^2)$ に対して，次の計算をしなさい．

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

《解答》

$$\begin{aligned} w_x &= \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2} \\ w_{xx} &= \frac{2(x^2 + y^2 + z^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \frac{2(-x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \end{aligned}$$

この他の偏微分は，対称性により計算せずとも分かる．後は足すのみで，

$$\frac{2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

を得る．

問題７．★★

次の微分方程式の一般解を求めなさい．

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - 15\frac{dy}{dx} + 36y = 0$$

《解答》

同次形の線型微分方程式なので，$y = e^{\lambda x}$ を一般解に持つ．よって，特性方程式

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 15\lambda + 36 = 0$$

を得る．やはり因数分解できて，

$$\begin{aligned} (\lambda - 3)(\lambda^2 + \lambda - 12) &= 0 \\ \lambda &= 3, -4, 3 \end{aligned}$$

を得る．3 が重解であることに注意し，一般解として

$$y = e^{3x}(C_1 x + C_2) + C_3 e^{-4x} \quad (C_1, C_2, C_3 : \text{定数})$$

としておけば良い．