実用数学検定１級
第176回１次検定

平成22年5月9日

はじめに

拙稿は私が個人的に趣味で作成した数検の解答案にすぎません．完璧なはずがありません．拙稿で勉強しようなどと横着なことはせず，然るべく教科書で本物の数学を学び，各自数検に挑むようにして下さい．利用の仕方は自由ですが，全て閲覧者の自己責任でお願い致します.

問題１．★

$\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ の分母を有理化しなさい．

《解答》

$\sqrt{2}+\sqrt{3}=a$ とおき，$a^2=5+2\sqrt{6}$ に注意して変形する．

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \frac{\sqrt{2}}{1+a} \\
&= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}a}{1-a^2} \\
&= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}-2}{-4-2\sqrt{6}} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{2+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2+\sqrt{6}} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{(2+\sqrt{6}-\sqrt{2})(2-\sqrt{6})}{4-6} \\
&= \frac{1}{-4}(-2-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}) \\
&= \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

問題２．★★

$xy \neq 0$ のとき，次の連立方程式を解きなさい．

$$\begin{cases} (x+y)(x^2+y^2) = \dfrac{40}{3}xy \\ (x^2+y^2)(x^4-y^4) = \dfrac{800}{9}x^2y^2 \end{cases}$$

《解答》

与えられた連立方程式の第２式を第１式で割る．

$$\begin{aligned} \frac{x^4-y^4}{x+y} &= \frac{20}{3}xy \\ (x-y)(x^2+y^2) &= \frac{20}{3}xy \qquad (1) \end{aligned}$$

(1) 式で第１式を割る．

$$\begin{aligned} \frac{x+y}{x-y} &= 2 \\ x &= 3y \end{aligned}$$

これを (1) 式に代入すると，

$$\begin{aligned} 2y \cdot 10y^2 &= 20y^2 \\ \therefore \qquad & y=1, x=3 \end{aligned}$$

が得られる．以上の変形は

$$\begin{aligned} x &= y \\ x &= -y \end{aligned}$$

の場合を除いて定義られるが，これらの場合が解でないことはすぐ分かる．

問題３．★★★

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^3}{k!}$ を求めなさい．

《解答》

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{(k-1)!}\\
&= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(l+1)^2}{l!}\\
&= \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{l^2}{l!}+\frac{2l}{l!}+\frac{1}{l!}\right)\\
&= \sum_{l=1}^{\infty}\frac{l^2}{l!}+2\sum_{l=1}^{\infty}\frac{l}{l!}+e\\
&= \sum_{l=1}^{\infty}\frac{l}{(l-1)!}+2\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{(l-1)!}+e\\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{m+1}{m!}+2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}+e\\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{m!}+e+2e+e\\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m-1)!}+4e=5e
\end{aligned}
$$

（教訓）

解答をみればどうということはないが，本問の式変形はコロンブスの卵的であり，過去にこのような変形に出会っているかどうかがカギである．もちろん

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=e$$

の知識は大前提である．これは e の定義式の一つと考えても良かろうというほど重要な式である．

問題４．★★

次の行列式を計算し，因数分解した形で表しなさい．

$$\begin{vmatrix} ax & ay+1 & az-1 \\ bx-1 & by & bz+1 \\ cx+1 & cy-1 & cz \end{vmatrix}$$

《解答》

第２行，第３行を第１行に足す．

$$\begin{vmatrix} x(a+b+c) & y(a+b+c) & z(a+b+c) \\ bx-1 & by & bz+1 \\ cx+1 & cy-1 & cz \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} x & y & z \\ bx-1 & by & bz+1 \\ cx+1 & cy-1 & cz \end{vmatrix}$$

さらに，第２行から $b\times$ 第１行を引き，第３行から $c\times$ 第１行を引く．

$$(a+b+c)\begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (a+b+c)(x+y+z)$$

教訓

行列に基本変形を施しても，行列式の値は変わらないことを知っていれば解答できる．

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

が成り立つのである．知識も大事だが，このような事実がなぜ成り立つのかを知るのが真の数学である．

$$\begin{pmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

が成り立ち，$\det AB = \det A \cdot \det B$ より，

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

で，行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

から直ちに確かめられる．その他の基本変形についても，基本変形に相当する行列が見つかり簡単に示すことができる．

問題５．★★★★

下の連立方程式について，次の問いに答えなさい．

$$\begin{cases} 2x+y+az=2a \\ x+ay-2z=2 \\ x+2y-z=1 \end{cases}$$

1. 係数行列と拡大係数行列（右辺の定数部分を含んだ行列）の階数が異なるような定数 a の値を求めなさい．
2. 上で求めた２つの値 a_1, a_2 (ただし $a_1 < a_2$) に対して a が $a_1 < a < a_2$ を満たすとき，解 x, y, z の和 $x+y+z$ が最大となる a の値を求めなさい．

《解答》

拡大係数行列 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & a & 2a \\ 1 & a & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ を rank の分かる形に変形する．

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3}(a^2-4)-1 & \frac{2}{3}(a-1)(a-2)+1 \\ 0 & -3 & a+2 & 2a-2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

従って，$a=\pm\sqrt{7}$ のとき，係数行列の rank が 2，拡大係数行列の rank が 3 になることが分かる．

続いて $x+y+z=k$ とおき，与えられた連立方程式から x を消去する．

$$\begin{cases} 2k-y+(a-2)z=2a \\ k+(a-1)y-3z=2 \\ x+y-2z=1 \end{cases}$$

これを解けば k が求まるが，クラーメルの公式が便利である．

$$k=5-\frac{42-15a}{7-a^2}$$

を得ることができるので，$f(a)=\dfrac{42-15a}{7-a^2}$ が最小となる a を探せばよい．

$$f'(a)=\frac{-3(5a^2-28a+35)}{(7-a^2)^2}$$

より，$a=\dfrac{14-\sqrt{21}}{5}$ は最小値を与え，かつ条件を満たす．

教訓

階数の知識より前半が解答でき，後半は計算力の見せどころである．階数は大学数学の序盤で登場する抽象概念であるが，いくら抽象的であっても，そのイメージは明確にしておく方が良い．適当な 3 次正方行列 A と 3 次元ベクトル $\boldsymbol{x}=(x,y,z)$ を考える．

$$A\boldsymbol{x}=0$$

は 3 元 1 次連立方程式である．解$\boldsymbol{x}$ について考察しよう．

$$A = A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

のとき，$\boldsymbol{x}$ の要素 $x.y.z$ はなんでも良く，このように 3 変数が自由に決められる状況を $\boldsymbol{x}$ は 3 次元の解空間と言う．続いて，

$$A = A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

のとき，$(x, y, z) = (0, y, z)$ で，y, z が任意に決まるので 2 次元の解空間となる．さて，A_1 の階数は 0 で，A_2 の階数は 1 なのである．即ち，階数とは 3 次元解空間 $\boldsymbol{x}$ に対する拘束力である．

$$A = A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

のとき，階数は 3 であり拘束力は MAX である．解空間 $\boldsymbol{x}$ は 0 次元であり，0 次元とは“点”のことである．即ち，このとき初めて (x, y, z) が一意的に決まるのである．

$$3 - (\text{階数}) = (\boldsymbol{x}\text{の次元})$$

問題６．★★★

y を x の関数とするとき，$\dfrac{y''}{\sqrt{1+(y')^2}}=1$ の初期条件 $y(0)=1,\ y'(0)=0$ を満たす解を求めなさい．

《解答》

与えられた微分方程式から，

$$\begin{aligned} y'' &= \sqrt{1+(y')^2} \\ (y'')^2 &= 1+(y')^2 \\ 2y''y''' &= 2y'y'' \\ y''' &= y' \end{aligned}$$

を得る．$t^3=t$ の解が $t=\pm1,0$ であることから，

$$y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3$$

であることが分かる．初期条件

$$\begin{cases} y(0)=c_1+c_2+c_3=1 \\ y'(0)=c_1-c_2=0 \end{cases}$$

より，

$$y=c_1e^x+c_1e^{-x}+1-2c_1$$

となる．これを $(y'')^2=1+(y')^2$ に代入すると，

$$\begin{aligned} (c_1e^x+c_1e^{-x})^2 &= 1+(c_1e^x-c_1e^{-x})^2 \\ c_1 &= \pm\frac{1}{2} \end{aligned}$$

となるので，

$$y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}) \quad \text{または} \quad -\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})+2$$

であるが，$y''=\sqrt{1+(y')^2}\geq 0$ なので，

$$y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$$

である．

《別解》

$y'(x)=p(x)$ とおくと，与えられた方程式は

$$\begin{aligned}
\frac{p'}{\sqrt{1+p^2}} &= 1\\
p' &= \sqrt{1+p^2}\\
\int\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} &= \int dx\\
\log|p+\sqrt{1+p^2}| &= x+c\\
|p+\sqrt{1+p^2}| &= Ce^x
\end{aligned}$$

と解ける．$p(0)=0$ より $C=0$ が分かり，さらに変形すると

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+p^2} &= \pm e^x-p\\
1 &= e^{2x}\mp 2e^xp\\
p &= \pm\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\\
y &= \pm\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})+C'
\end{aligned}$$

が得られる．$y(0)=1$ より，$y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ に限る．

教訓

微分方程式は記号的に解答できることが最大の教訓である．1 級対策として，前半で利用した線型微分方程式の知識は重要である．

$$y^{(3)}-3y'-2y=0$$

と言った 3 階線型微分方程式の特性方程式を解き，

$$\begin{aligned}
t^3-3t-2 &= 0\\
t &= -1(\,2\,\text{重}),2
\end{aligned}$$

であるとき，$y=(c_1+c_2x)e^{-x}+c_3e^{2x}$ が方程式の解である．一般に，n 階線型微分方程式の特性解 λ が得られた時，次の関係が知られている．

$$\begin{cases}
t=\lambda\text{が実数の単根} & \to\quad c_1e^{\lambda x}\\
t=\lambda\text{が実数の } m \text{ 重解} & \to\quad (c_1+c_2x+\cdots+c_mx^{m-1})e^{\lambda x}\\
t=p+qi \text{ が } m \text{ 重解} & \to\quad (c_1+c_2x+\cdots+c_mx^{m-1})e^{px}\cos qx\\
 & \qquad\quad +(d_1+d_2x+\cdots+d_mx^{m-1})e^{px}\sin qx
\end{cases}$$

問題７．★

平面上の領域 D（正方形）が次のように与えられています.

$$D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$$

このとき次の２重積分を計算しなさい.

$$\iint_D |x-y|^{-\frac{2}{3}}\ dxdy$$

《解答》

積分領域の正方形に関して，$y = x$ より上方を D_1，下方を D_2 と分けて考えると絶対値を外すことができる.

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \iint_{D_1} (-x+y)^{-2/3}\ dxdy + \iint_{D_2} (x-y)^{-2/3}\ dxdy \\
&= \int dy \left[3(-x+y)^{1/3}\right]_0^y + \int dy \left[3(x-y)^{1/3}\right]_y^1 \\
&= 3\int_0^1 y^{1/3}\ dy + 3\int_0^1 (1-y)^{1/3}\ dy \\
&= 3\left[\frac{3}{4}y^{4/3}\right]_0^1 - 3\left[\frac{3}{4}(1-y)^{4/3}\right]_0^1 \\
&= \frac{9}{2}
\end{aligned}$$