実用数学検定１級
第171回１次検定

平成22年5月9日

はじめに

拙稿は私が個人的に趣味で作成した数検の解答案にすぎません．完璧なはずがありません．拙稿で勉強しようなどと横着なことはせず，然るべく教科書で本物の数学を学び，各自数検に挑むようにして下さい．利用の仕方は自由ですが，全て閲覧者の自己責任でお願い致します．

問題 1．★★★

次の整式を因数分解しなさい．

$$xy(x^2-y^2)+yz(y^2-z^2)+zx(z^2-x^2)$$

《解答》

すぐに因数 $(x-y)(y-z)(z-x)$ が見つかるので，割り算を実行しました．先ず $(x-y)$ を因数に持つので，

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= (x-y)\{xy(x+y)-zx^2-yzx+z(z^2-y^2)\} \\ &= (x-y)\{z^3-(x^2+xy+y^2)z+xy(x+y)\}\end{aligned}$$

と変形できます．残りの因数 $(y-z)(x-z)=z^2-(x+y)z+xy$ から，

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= (x-y)(y-z)(x-z)(z+x+y) \\ &= -(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)\end{aligned}$$

と因数分解出来ました．サラッと書いてますが，必死に割り算を実行したことを申し添えておきます（笑）

問題2．★★

$(1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})^3$ を簡単にしなさい.

《解答》

$\alpha=\sqrt[3]{2}$ として，$\alpha^3=2$，$\alpha^4=2\alpha$ に注意して式変形しました.

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= (1-\alpha+\alpha^2) \\
&= (1-\alpha)^3+3(1-\alpha)^2\alpha^2+3(1-\alpha)\alpha^4+\alpha^6 \\
&= 1-3\alpha+3\alpha^2-2+3(\alpha^2-4+2\alpha)+3(2\alpha-2\alpha^2)+4 \\
&= -9+-\alpha \\
&= 9(\sqrt[3]{2}-1)
\end{aligned}
$$

以上.

問題３．★

次の行列式の値を求めなさい．

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ -4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

《解答》

規則性がありそうですが，考える時間がもったいなかったので力技にでました．

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \begin{vmatrix} 0 & 10 & -10 & -10 \\ 0 & 5 & -2 & -11 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & 14 & 17 \end{vmatrix} \\
&= 10\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 5 & -2 & -11 \\ -5 & 14 & 17 \end{vmatrix} \\
&= 10\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 9 & 12 \end{vmatrix} \\
&= 90\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\
&= 900
\end{aligned}$$

今回も力技ばかりです（汗）

問題４．★★★

次の関係式によって z を x, y の関数と定義します.

$$x^2+y^2+z^2+2x+2y+2z=0$$

このとき

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

を z の式で表わしなさい.

《解答》

両辺のを x による２階偏微分を考えます.

$$\begin{cases} 1\text{階}: 2x+2z\cdot z_x+2+2z_x=0 \\ 2\text{階}: 2+2z_x^2+2z\cdot z_{xx}+2z_{xx}=0 \end{cases}$$

より,

$$\begin{cases} z_x=-\dfrac{x+1}{z+1},\ z_y=-\dfrac{y+1}{z+1} \\ z_{xx}=-\dfrac{z_x^2+1}{z+1},\ z_{yy}=-\dfrac{z_y^2+1}{z+1} \end{cases}$$

が得られます. 求める式は, $-\dfrac{z_x^2+z_y^2+2}{z+1}$ であるが,

$$\begin{aligned} z_x^2+z_y^2+1 &= \frac{1}{(z+1)^2}\{(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2\} \\ &= \frac{x^2+2x+y^2+2y+2+2z^2+4z+2}{(z+1)^2} \\ &= \frac{-z^2-2z+2+2z^2+4z+2}{(z+1)^2} \quad (\text{定義式を利用}) \\ &= \frac{z^2+2z+4}{(z+1)^2} \end{aligned}$$

と変形できるので,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{z^2+2z+4}{(z+1)^3}$$

以上.

問題５．★★★★★

下の連立方程式の解について，次の問に答えなさい．

$$\begin{cases} ax+y+2z=1 \\ x+ay+2z=a \\ x+2y+az=a-1 \end{cases}$$

1. 係数の行列式が 0 にならない条件を求め，そのときの解を求めなさい．
2. 係数の行列式が 0 になる場合の解を吟味しなさい．

《解答》

先ず素直に係数の行列式を計算すると，

$$\begin{aligned} a(a^2-4)+(2-a)+2(2-a) &= a^3-7a+6 \\ &= (a-1)(a+3)(a-2) \end{aligned}$$

となるので，$a \neq 1, 2, -3$ であれば係数の行列式は 0 にならない．続いて面倒だが拡大係数行列の簡約化により連立方程式を解く．

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & 1 & 2 & | & 1 \\ 1 & a & 2 & | & a \\ 1 & 2 & a & | & a-1 \end{pmatrix} &\to \begin{pmatrix} 0 & 1+a & 2 & | & 1+a \\ 1 & a & 2 & | & a \\ 1 & 2 & a & | & a-1 \end{pmatrix} \\ &\to \begin{pmatrix} 0 & 1+a & 2 & | & 1+a \\ 0 & 1 & -1 & | & \frac{1}{a-2} \\ 1 & 2 & a & | & a-1 \end{pmatrix} \\ &\to \begin{pmatrix} 0 & a+3 & 0 & | & \frac{a(a-1)}{a-2} \\ 0 & 1 & -1 & | & \frac{1}{a-2} \\ 1 & 2 & a & | & a-1 \end{pmatrix} \\ &\to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & | & \frac{a(a-1)}{(a-2)(a+3)} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{(a-3)(a+1)}{(a-2)(a+3)} \\ 1 & 2 & a & | & a-1 \end{pmatrix} \\ &\to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & | & \frac{a(a-1)}{(a-2)(a+3)} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{(a-3)(a+1)}{(a-2)(a+3)} \\ 1 & 0 & 0 & | & \frac{-2a+6}{(a-2)(a+3)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と簡約化できるので，

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2a+6}{(a-2)(a+3)} \\ y &= \frac{a(a-1)}{(a-2)(a+3)} \\ z &= \frac{(a-3)(a+1)}{(a-2)(a+3)} \end{aligned}$$

を得る．$a=1, 2, -3$ の場合の解について考えるには，実際に代入し，簡約化を試みればよい．$a=1$

とすると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 1 \\ 1 & 1 & 2 & | & 1 \\ 1 & 2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 1 & 2 & | & 1 \\ 1 & 2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 0 & 3 & | & 2 \end{pmatrix}$$

と簡約化でき，適当な定数 c を導入すると，

$$\begin{cases} x = 2 - 3c \\ y = c - 1 \\ z = c \end{cases}$$

が得られる．$a = -3$ の場合は，

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & | & 1 \\ 1 & -3 & 2 & | & -3 \\ 1 & 2 & -3 & | & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & | & -1 \\ 1 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 5 & -5 & | & -1 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & | & -1 \\ 1 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 4 \end{pmatrix}$$

と簡約化でき，第 3 行から解なしと分かる．$a = 2$ の場合も，

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & | & 1 \\ 1 & 2 & 2 & | & 2 \\ 1 & 2 & 2 & | & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & | & 1 \\ 1 & 2 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 \end{pmatrix}$$

と簡約化でき，第 3 行から解なしと分かる．

問題６．★★

次の連立微分方程式を解きなさい.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x(t) + y(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = x(t) + 3y(t) \end{cases}$$

《解答》

２式の和と差を考えると,

$$\begin{cases} 4(x+y) = x' + y' \\ 2(x-y) = x' - y' \end{cases}$$

より,

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(C_1 e^{4t} + C_2 e^{2t}) \\ y = \frac{1}{2}(C_1 e^{4t} - C_2 e^{2t}) \end{cases}$$

が得られます.

問題 7．★★

$\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x^4+2x^3+4x^2+6x+2}{x^3+2x^2+2x+4}dx$ を計算しなさい.

《解答》

見た目はすごいですが，割り算実行→部分分数分解の定石通りで解けました.

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int_{-1}^{1} x+\frac{2x^2+2x+2}{x^3+2x^2+2x+4}dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+2x+2}{(x+2)(x^2+2)}dx \\
&= \int_{-1}^{1}\frac{1}{x+2}+\frac{x}{x^2+2}dx \\
&= \left[\log|x+2|+\frac{1}{2}\log|x^2+2|\right]_{-1}^{1} \\
&= \log 3+\frac{1}{2}\log 3-0-\frac{1}{2}\log 3 \\
&= \log 3
\end{aligned}
$$