実用数学検定１級
第167回１次検定

平成 22 年 5 月 11 日

はじめに

拙稿は私が個人的に趣味で作成した数検の解答案にすぎません．完璧なはずがありません．拙稿で勉強しようなどと横着なことはせず，然るべく教科書で本物の数学を学び，各自数検に挑むようにして下さい．利用の仕方は自由ですが，全て閲覧者の自己責任でお願い致します.

問題１．★★★★

次の式を展開整理して因数分解しなさい．

$$(x+y+z)(-x^2-y^2-z^2+2xy+2yz+2zx)-8xyz$$

《解答》

特に何も気づかないので，適当に因数を探すが見つからず（汗）取りあえず，展開してみました．

$$-x^3-y^3-z^3+xy^2+yz^2+zx^2+x^2y+y^2z+z^2x-2xyz$$

改めて因数を探すと，$x=y+z$ が見つかりました．迷わず割り算を実行しました．

$$(x-y-z)\{-x^2+(y-z)^2\}=(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)$$

以上．結果を見ると，目星をつけられなかったことがとても悔しいですね．

問題２．★★★

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{1/x^2}$$ を求めなさい．

《解答》

ネピア定数の定義式に帰着させるのは明らかです．また，tan はこのままではどうしようもないので，テイラー展開を試みます．このとき x^4 の項以降は無視しても良さそうだと思えれば勝ちですね（厳密な証明は略）．

先ず，$\tan x$ をテイラー展開します．

$$\tan x = x + \frac{2}{3!}x^3 + \cdots$$

これを与式に代入すると，

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \lim_{x\to+0}\left(1+\frac{2}{3!}x^2+\cdots\right)^{1/x^2} \\
&= \lim_{x\to+0}\left(1+\frac{2}{3!}x^2\right)^{1/x^2} \\
&= \lim_{x\to+0}\left\{(1+\frac{2}{3!}x^2)^{1/\frac{2}{3!}x^2}\right\}^{2/3!} \\
&= e^{1/3}
\end{aligned}$$

以上です．

問題３．★

$z = f(x, y)$ の全微分は次のように定義されます.

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{1}$$

次の関数の全微分を求めなさい.

$$z = e^{2x^3} \cos 4y^2$$

《解答》

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 6x^2 \cdot e^{2x^3} \cos 4y^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= e^{2x^3}(-\sin 4y^2) \cdot 8y \end{aligned}$$

よって，$dz = e^{2x^3}(6x^2 \cos 4y^2 \ dx - 8y \sin 4y^2 \ dy)$.

問題４．★

次の行列式を計算しなさい.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{vmatrix}$$

《解答》

単純に簡約化を繰り返します. $k+1$ 行目から k 行目を引くという方法で比較的簡単にいきます.

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) \quad &= \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & 10 & 20 \\ 0 & 1 & 5 & 15 & 35 \end{vmatrix} \\
&= \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{vmatrix} \\
&= \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \\
&= \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1
\end{aligned}$$

問題５．★★★★

$\sqrt[3]{6+\sqrt{\dfrac{980}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\dfrac{980}{27}}}$ について次の問に答えなさい．

(1) この数はある 3 次の代数方程式の解の一つです．この方程式を求めなさい．

(2) (1) で求めた方程式をもとに上の数を簡単にしなさい．

《解答》

タルターリャの公式が利用できますが，これに拘った私は負け組 $\cdots$．もっと簡単な解答がありました．与えられた数を $a+b$ と表現します．前後の 3 乗根をそれぞれ a,b とおいたのです．

$$\begin{aligned} a^3+b^3 &= 12 \\ ab &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

がすぐに計算できます．$a+b=X$ とおいて，X^3 を計算します．

$$\begin{aligned} X^3 &= a^3+3ab(a+b)+b^3 \\ &= 12-2X \end{aligned}$$

よって，与えられた数は，

$$X^3+2X-12=0$$

の解と分かります．この式から $X=2$ が見つかります．

問題６．★★★

フィボナッチ数列 $\{f_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$ は，

$$\begin{cases} f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \quad (n \geq 1) \\ f_0 = 0,\ f_1 = 1 \end{cases}$$

で定義されます．このとき，次の級数の和を求めなさい．

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{2^n}$$

《解答》

フツーの問題です．$\dfrac{f_n}{2^n} = F_n$ とおくと，漸化式

$$\begin{aligned} 2^{n+1}F_{n+1} &= 2^n F_n + 2^{n-1}F_{n-1} \\ 4F_{n+1} &= 2F_n + F_{n-1} \end{aligned}$$

が得られます．$4x^2 - 2x - 1 = 0$ の解を $\alpha, \beta\ (\alpha > \beta)$ とすると，上の漸化式は，

$$\begin{cases} F_{n+1} - \alpha F_n = \beta(F_n - \alpha F_{n-1}) \\ F_{n+1} - \beta F_n = \alpha(F_n - \beta F_{n-1}) \end{cases}$$

と２通りに書ける．

$$\begin{cases} F_{n+1} - \alpha F_n = \beta^n(F_1 - \alpha F_0) = \dfrac{\beta^n}{2} \\ F_{n+1} - \beta F_n = \alpha^n(F_1 - \beta F_0) = \dfrac{\alpha^n}{2} \end{cases}$$

と変形し連立すると，

$$(\alpha - \beta)F_n = \frac{1}{2}(\alpha^n - \beta^n)$$

を得る．ゆえに与式は，

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n = \frac{1}{\alpha - \beta}\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha - \beta)F_n \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(\alpha^n - \beta^n) \\ &= \frac{1}{2(\alpha - \beta)}\left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\beta}\right) \end{aligned}$$

ところで，$\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$，$\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$ なので，

$$\begin{cases} \alpha - \beta = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \\ \dfrac{1}{1-\alpha} = \dfrac{4}{3-\sqrt{5}},\ \dfrac{1}{1-\beta} = \dfrac{4}{3+\sqrt{5}} \end{cases}$$

以上より，

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \frac{\sqrt{5}}{2}\left(\frac{4}{3-\sqrt{5}} - \frac{4}{3+\sqrt{5}}\right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

問題7．★★★

アルキメデスのらせんは極座標で $r=\theta$ $(\theta \geqq 0)$ で表わされます．原点 O を始点として半直線 l $(\theta=0)$ をひき，O より出発したらせんが初めて l と交わる点を A とします．線分 OA とこのらせんに囲まれる部分の面積と，O を中心として半径 OA の円の面積との比を求めなさい．

《解答》

アルキメデスのらせんに囲まれる部分 S_1 を，$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の範囲を n 分割することを考える．k 番目の角 $\dfrac{2k\pi}{n}$ に対しておおよそ扇形の面積が得られ，その面積は,

$$\left(\frac{2k\pi}{n}\frac{2\pi}{n}\right)\cdot\frac{2k\pi}{n}\cdot\frac{1}{2}=\frac{4\pi^3}{n^3}\cdot k^2$$

で近似できる．これを k について，0〜n まで足し合わせ，$n\to\infty$ としたものが S_1 である．

$$\begin{aligned}
S_1 &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{4\pi^3}{n^3}k^2\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{4\pi^3}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\\
&= \frac{4\pi^3}{3}
\end{aligned}$$

円の面積は $4\pi^3$ なので，1/3 の面積となることが分かる．