実用数学検定 1 級
第 161 回 1 次検定

平成 22 年 5 月 9 日

はじめに

拙稿は私が個人的に趣味で作成した数検の解答案にすぎません．完璧なはずがありません．拙稿で勉強しようなどと横着なことはせず，然るべく教科書で本物の数学を学び，各自数検に挑むようにして下さい．利用の仕方は自由ですが，全て閲覧者の自己責任でお願い致します．

問題１．★★★

次の連立方程式の実数解の組を求めなさい．

$$\begin{cases} \left(3-\dfrac{6y}{x+y}\right)^2+\left(3+\dfrac{6y}{x-y}\right)^2=82 \\ xy=2 \end{cases}$$

《解答》

見た瞬間，一つ目の式の分母 $x+y, x-y$ がウザイなと思えたら勝ちですね^^両辺に $(x+y)^2(x-y)^2$ を掛けましょう！

$$\begin{aligned} (x-y)^2(x+y-2y)^2+(x+y)^2(x-y+2y)^2 &= \frac{82}{9}(x+y)^2(x-y)^2 \\ (x-y)^4+(x+y)^4 &= \frac{82}{9}(x+y)^2(x-y)^2 \end{aligned}$$

ここで，$(x+y)^2=A, (x-y)^2=B$ とおくと計算が早くなりそうです．

$$\begin{aligned} A^2+B^2=\frac{82}{9}AB &= 0 \\ 9A^2-82AB+9B^2 &= 0 \\ A &= \frac{B}{9}, 9B \end{aligned}$$

それぞれ，元の式に戻して計算しましょう．

- $A=\dfrac{B}{9}$

$$\begin{aligned} x^2+2xy+y^2 &= \frac{1}{9}(x^2-2xy+y^2) \\ 8(x^2+y^2) &= -20xy=-40 \end{aligned}$$

この式はおかしいですね．平方数の和が負の数になるはずがありません！よって不適ですね．

- $A=9B$

$$\begin{aligned} x^2+2xy+y^2 &= 9(x^2-2xy+y^2) \\ 8(x^2+y^2) &= 20xy=40 \\ x^2+y^2 &= 5 \end{aligned}$$

$$(x+y)^2-2xy=5$$
$$x+y=\pm3$$

これと，$xy=2$ を連立して，$(x,y)=(\pm1,\pm2),(\pm2,\pm1)$ となりました．

問題２．★★

次の計算をしなさい．

$$A_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j) \qquad (\text{ただし}, i > j)$$

《解答》

j を固定して，i を動かすことを考えましょう．例えば，$j=1$ とすると，i は 2〜n まで動けますね．つまり，

$$\begin{aligned}&(1+\cdots+1)+(2+3+\cdots+n)\\&=1(n-1)+(2+3+\cdots+n)\end{aligned}$$

となります．次に $j=2$ とすると，i は 3〜n まで動けて，

$$2(n-2)+(3+4+\cdots+n)$$

となり，$j=k$ のときは，

$$\begin{aligned}k(n-k)+\{(k+1)+(k+2)+\cdots+n)\}\\=nk-k^2+(j+n+1)\frac{n-j}{2}\\=-\frac{3}{2}k^2+\frac{1}{2}(2n-1)k+\frac{n}{2}(n+1)\end{aligned}$$

となりますね．k は 1〜$n-1$ まで動けます.,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}-\frac{3}{2}k^2+\frac{1}{2}(2n-1)k+\frac{n}{2}(n+1)\\=-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)+\frac{2n-1}{2}\cdot\frac{1}{2}n(n-1)+\frac{1}{2}n(n-1)(n+1)\\=\frac{1}{2}n(n+1)(n-1)\end{aligned}$$

以上.

問題３．★★★

ω を $x^3=1$ の虚数解の 1 つとするとき，次の行列式 D の 2 乗の値を求めなさい．

$$D=\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega & \omega^2 & 1 & 1 \\ \omega^2 & 1 & 1 & \omega \\ 1 & 1 & \omega & \omega^2 \end{vmatrix}$$

《解答》

この問題は力技以外思いつきませんでした ^^;
愚鈍なやりかたですが，一応掲載します．余因子行列展開です．

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \begin{vmatrix} \omega^2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{vmatrix} - \omega \begin{vmatrix} \omega & \omega^2 & 1 \\ 1 & 1 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{vmatrix} + \omega^2 \begin{vmatrix} \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \omega \end{vmatrix} \\ &= -\omega^2+2\omega-1-2\omega^2+\omega+1 \\ &= -3\omega(\omega-1)\end{aligned}$$

これを 2 乗すると，

$$\begin{aligned}\{-3\omega(\omega-1)\}^2 &= 9\omega^2(\omega^2-2\omega+1) \\ &= 9\omega(-3\omega) \\ &= -27\end{aligned}$$

となりました．

問題４．★★

次の行列 A の階数 (rank) を調べなさい．ただし，$xyz \neq 0$ とします．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 1 \\ -x & 0 & y & 0 \\ 0 & -y & 0 & z \\ -1 & 0 & -z & 0 \end{pmatrix}$$

《解答》

A を行基本操作により変形する．

$$A \to \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 1 \\ 0 & 0 & y+xz & 0 \\ 0 & y+xz & 0 & 0 \\ 1 & 0 & z & 0 \end{pmatrix}$$

- $y + zx = 0$ なら，

$$\begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & z & 0 \end{pmatrix}$$

と変形できるので，rank$= 2$.

- $y + zx \neq 0$ なら，

$$\begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & z & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と変形できるので，rank$= 4$.

問題５．★★★★

4 次方程式 $x^4-4x-1=0$ について，次の問いに答えなさい．

1. 上の方程式の実数解を求めなさい．

2. 上の方程式の虚数解を求めなさい．

《解答》

$x^4-4x-1=(x^2+px+q)(x^2+rx+s)$ とおいて，係数比較する．

$$x^4+(p+r)x^3+(q+s+pr)x^2+(ps+qr)x+sq$$

と展開できるので，

$$\begin{cases} p+r=0 \\ q+s+pr=0 \\ ps+qr=-4 \\ sq=-1 \end{cases} \tag{1}$$

第１・２式から $p^2=q+s$．第１・３式から $p(q-s)=4$．p を消去する．

$$\begin{aligned} \frac{16}{(q-s)^2} &= q+s \\ \frac{16}{(q+s)^2-4qs} &= q+s \end{aligned}$$

第４式から $qs=-1$ で，さらに $q+s=X$ とおくと，

$$\begin{aligned} \frac{16}{X^2+4} &= X \\ X^3+4X-16=0 & \\ X=2,-2,-4 & \end{aligned}$$

を得るが，$X=q+s=p^2\geq 0$ なので $p^2=q+s=2$ である．$p=\sqrt{2}$ として (1) を書き換えると，

$$\begin{cases} r=-\sqrt{2} \\ q+s=2 \\ q-s=2\sqrt{2} \\ sq=-1 \end{cases} \tag{2}$$

となるので，$(p,q,r,s)=(\sqrt{2},1+\sqrt{2},-\sqrt{2},1-\sqrt{2})$．また，$p=-\sqrt{2}$ としても同様の展開を得る．

$$(x^2+px+q)(x^2+rx+s)=0$$
$$(x^2+\sqrt{2}x+1+\sqrt{2})(x^2-\sqrt{2}x+1-\sqrt{2})=0$$

これと解くと，

$$\begin{cases} \text{実数解}\ x=\dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2} \\ \text{虚数解}\ x=\dfrac{-\sqrt{2}\pm i\sqrt{4\sqrt{2}+2}}{2} \end{cases}$$

以上.

問題６．★★★

心臓形

$$\begin{cases} x = 2\cos\theta - \cos 2\theta \quad (0 \leqq x \leqq \pi) \\ x = 2\sin\theta - \sin 2\theta \end{cases}$$

を x 軸のまわりに 1 回転してできる曲面の面積を求めなさい.

《解答》

公式通りに，$2\pi \int_0^\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} \equiv S$ を計算します.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= -2\sin\theta + 2\sin 2\theta \\ \frac{dy}{d\theta} &= 2\cos\theta - 2\cos 2\theta \\ \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 &= 4(\sin^2\theta + \sin^2 2\theta - 2\sin\theta\sin 2\theta) \\ \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 &= 4(\cos^2\theta + \cos^2 2\theta - 2\cos\theta\cos 2\theta) \end{aligned}$$

である.

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 &= 4\{1 + 1 - 2(\sin\theta\sin 2\theta + \cos\theta\cos 2\theta)\} \\ &= 8 - 8\cos(2\theta - \theta) \\ &= 8(1 - \cos\theta) \end{aligned}$$

を代入して S を計算する.

$$\begin{aligned} S &= 4\sqrt{2}\pi \int_0^\pi (2\sin\theta - \sin 2\theta)\sqrt{1 - \cos\theta}\, d\theta \\ &= 4\sqrt{2}\pi \int_0^\pi 2\sin\theta (1 - \cos\theta)^{3/2} d\theta \end{aligned}$$

$t = \cos\theta$とおく.

$$\begin{aligned} &= 8\sqrt{2}\pi \int_{-1}^1 (1 - t)^{3/2} dt \\ &= 8\sqrt{2}\pi \left[\frac{2}{5}(1 - t)^{5/2}\right]_{-1}^1 \\ &= \frac{128}{5}\pi \end{aligned}$$

以上.

問題７．★

$0 < x < 1$ における微分方程式

$$u''(x) = -\pi^2 \sin(\pi x)$$

を満たし，２点境界条件 $u(0) = 0, u'(1) = 0$ を満たす解 $u(x)$ を求めなさい．

《解答》

普通に積分を２回行う．

$$\begin{aligned} u'(x) &= \pi \cos \pi x + C_1 \\ u(x) &= \sin \pi x + C_1 x + C_2 \end{aligned}$$

これに境界条件を代入すると，

$$\begin{aligned} u'(0) &= -\pi + C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \pi \\ u(0) &= C_2 = 0 \end{aligned}$$

を得る．よって，$u(x) = \sin(\pi x) + \pi x$.