実用数学検定 1 級
第 149 回 1 次検定

平成 22 年 5 月 9 日

はじめに

拙稿は私が個人的に趣味で作成した数検の解答案にすぎません．完璧なはずがありません．拙稿で勉強しようなどと横着なことはせず，然るべく教科書で本物の数学を学び，各自数検に挑むようにして下さい．利用の仕方は自由ですが，全て閲覧者の自己責任でお願い致します．

問題 1．★★

　316 を 2 つの正の整数 x, y の和で表します．ただし，x は 13 の倍数，y は 11 の倍数です．このような 2 数 x, y の組をすべて求めなさい．

《解答》

　$x = 13m, y = 11n$ (m, n : 正の整数) とおく．

$$13m + 11n = 316$$

$13m_1 + 11n_1 = 0, 13m_2 + 11n_2 = 1$ の解をそれぞれ見つける．

$$\begin{aligned}(m_1, n_1) &= (11, -13), (m_2, n_2) = (-5, 6) \text{ より},\\ (m, n) &= k(11, -13) + 316(-5, 6) \qquad (k \text{ は整数})\\ (m, n) &= (15, 11), (4, 24)\end{aligned}$$

以上から，$(x, y) = (195, 121), (52, 264)$．

問題２．★★★

正の整数 n に対して，$1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1) = (2n-1)!!$ と表すことにします．このとき，次の極限値を求めなさい．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}{n}$$

《解答》

$A_n = \dfrac{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}{n}$ とおく．

$$\begin{aligned}
A_n &= \sqrt[n]{\frac{(2n-1)!!}{n^n}} \\
&= \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}\cdot\frac{(2n)!}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2n}} \\
&= \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}\frac{1}{2^n}\frac{(2n)!}{n!}} \\
&= \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)} \\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/n}\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/n}
\end{aligned}$$

ここで，両辺の対数をとる．

$$\begin{aligned}
\log A_n &= \log 1/2 + \frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}\log\left(1+\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n}\log\left(1+\frac{n}{n}\right) \\
&= \log 1/2 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)
\end{aligned}$$

$n \to \infty$ とすると，区分求積法より，

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\log A_n &= \log 1/2 + \int_1^2 \log x dx \\
&= \log 1/2 + [x\log x]_1^2 - \int_1^2 dx \\
&= \log\left(\frac{1/2\times 2^2}{e}\right)
\end{aligned}$$

よって，

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \frac{2}{e}$$

以上．

問題３．★

$\sqrt{1+\sin x} \quad (0 < x < \pi)$ をマクローリン展開して，定数項から x^5 の項までを求め，和の形で表しなさい．

《解答》

微分して行くと法則性に気づく．

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{1+\sin x} \\
f'(x) &= \frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}} \\
f''(x) &= \frac{-2\sin x\sqrt{1+\sin x} - \cos^2 x}{4(1+\sin x)} \\
&= -\frac{(1+\sin x)^2}{4(1+\sin x)^{3/2}} \\
&= -\frac{1}{4}f(x) \\
f'''(x) &= -\frac{1}{4}f'(x) \\
f^{(4)}(x) &= -\frac{1}{4}f''(x) = \frac{1}{16}f(x) \\
f^{(5)}(x) &= \frac{1}{16}f'(x) = \frac{\cos x}{32\sqrt{1+\sin x}}
\end{aligned}$$

よって，マクローリン展開は，

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + \frac{1}{384}x^4 + \frac{1}{3840}x^5$$

となる．

問題4．★★★

次の微分方程式の一般解を求めなさい．

$$(2x - y + 3) - (x - 2y + 3)y' = 0$$

《解答》

$$(2x - y + 3)dx - (x - 2y + 3)dy = 0$$

と変形できる．この式を以下のように置く．

$$Pdx + Qdy = 0$$

即ち，$P = 2x - y + 3, Q = -x + 2y - 3$ と置いた．すると，

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -1$$

とことから，この微分方程式は完全微微分形であると分かる．

$$\begin{aligned}
F(x, y) &= \int_0^x P(s, 0)ds + \int_0^y Q(x, t)dt \\
&= \int_0^x (2s + 3)ds + \int_0^y (-x + 2t - 3)dt \\
&= [s^2 + 3s]_0^x + [-xt + t^2 - 3t]_0^y \\
&= x^2 - xy + y^2 + 3x - 3y = C
\end{aligned}$$

以上．

問題５．★★

下の４次正方行列について，次の問に答えなさい．

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 固有多項式を求めなさい．
- 固有値を求めなさい．

《解答》

与えられた正方行列を A とする．

$$\begin{aligned} det(\lambda E - A) &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda\{\lambda(\lambda^2 - 1) + (-\lambda)\} - (\lambda^2 - 1) \\ &= \lambda^4 - 3\lambda^2 - \lambda + 1 \\ &= (\lambda^2 - \lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 1) \end{aligned}$$

これを解いて，固有値 $\lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

問題６．★★★

数直線上の 0 と 1 の間で任意に 2 つの値 x, y を選ぶとき，それらが

$$| x - y | \geqq 0.3$$

を満たす確率を求めなさい．

《解答》

先ず x を定めた上で，y の範囲を考える．

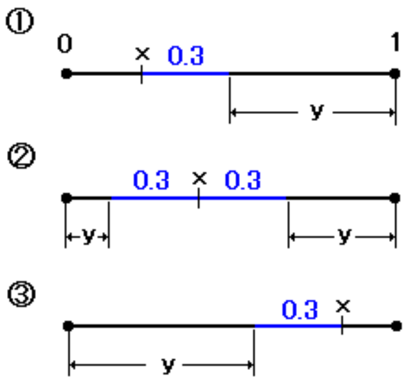

図 1: y の存在範囲

(1)x が十分に小さいとき，y は x の右側にのみ存在できる．
(2)x が数直線の真ん中辺りの時，y は x の両側に存在できる．
(3)x が十分に大きいとき，y は x の左側にのみ存在できる．

それぞれの確率を P_1, P_2, P_3 とする．明らかに $P_1 = P_2$ であることに注意して，
(1)$0 \leq x \leq 0.3$ のとき

$$\begin{aligned} P_1 &= \int_0^{0.3} (1 - x - 0.3) dx \\ &= [0.7x - x^2/2]_0^{0.3} = 0.21 - \frac{0.09}{2} \end{aligned}$$

(2)$0.3 \leq x \leq 0.7$ のとき

$$\begin{aligned} P_2 &= \int_{0.3}^{0.7} (1 - 0.6) dx \\ &= [0.4x]_{0.3}^{0.7} = 0.16 \end{aligned}$$

よって，求める確率 P は

$$P = 2P_1 + P_2 = 0.49$$

以上．

問題７．★

$x \geq 0$ で定義された２つの連続関数 $f(x), g(x)$ の " たたみこみ積 (conbolution) " は

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt$$

で定義されます．ここで，$f(x) = x, (f * g)(x) = x^3$ であるとき，$g(x)$ を求めなさい．

《解答》

与えられた条件よりコンボリューション積分は，

$$\begin{aligned} x^3 &= \int_0^x (x-t)g(t)dt \\ &= x\int_0^x g(t)dt - \int_0^x tg(t)dt \end{aligned}$$

となる．両辺を x で微分する．

$$\begin{aligned} 3x^2 &= \int_0^x g(t)dt + xg(x) - xg(x) \\ 3s^2 &= \int_0^x g(t)dt \\ 6x &= g(x) \end{aligned}$$

以上.