実用数学検定１級
第137回１次検定

平成22 年5 月8 日

はじめに

拙稿は私が個人的に趣味で作成した数検の解答案にすぎません．完璧なはずがありません．拙稿で勉強しようなどと横着なことはせず，然るべく教科書で本物の数学を学び，各自数検に挑むようにして下さい．利用の仕方は自由ですが，全て閲覧者の自己責任でお願い致します.

問題１．★

$x^8-8x^6+20x^4-17x^2+4=0$ の解をすべて求めなさい..

《解答》

$x^2=X$ とおく.

$$\begin{aligned} X^4-8X^3+20X^2-17X+4 &= 0 \\ (X-1)(X^3-7X^2+13X-4) &= 0 \\ (X-1)(X-4)(X^2-3X+1) &= 0 \end{aligned}$$

実際に X の解を探し出し，割り算を実行した（X が正の数である事に注意する）.

$$\begin{aligned} X &= 3,4,\frac{3\pm\sqrt{5}}{2} \\ x &= \pm\sqrt{3},\pm 2,\pm\sqrt{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}} \end{aligned}$$

$\sqrt{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}$ を整理する.

$$\sqrt{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{6\pm 2\sqrt{5}}}{2}=\frac{\sqrt{5}\pm 1}{2}$$

ゆえに,

$$x=\pm\sqrt{3},\pm 2,\frac{\sqrt{5}\pm 1}{2},\frac{-\sqrt{5}\pm 1}{2}$$

以上.

問題２．★

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3}$ を求めなさい．

《解答》

$\dfrac{0}{0}$ の不定形となるので，ロピタルの定理で解決する．以下の $\Rightarrow$ に従い分母，分子を微分してゆく．

$$
\begin{aligned}
\text{（与式）} &\Rightarrow \frac{e^x - (e^{\sin x}\cos^2 x - e^{\sin x}\sin x)}{6x} \\
&\Rightarrow \frac{e^x - e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x)}{6x} \\
&\Rightarrow \frac{e^x - \{e^{\sin x}\cos x(\cos^2 x - \sin x) + e^{\sin x}(-2\cos x\sin x - \cos x)\}}{6} \\
&\to \frac{1}{6} \quad (x \to 0)
\end{aligned}
$$

以上.

問題３．★★

次の連立方程式の解をすべて求めなさい．

$$\begin{cases} xy^2 + xy^4 = 90 \\ xy^5 + xy^7 = 2430 \end{cases}$$

《解答》

$$\begin{cases} xy^2(1+y^2) = 90 \\ xy^5(1+y^2) = 2430 \end{cases}$$

としておく．下式を上式で割ると，

$$\begin{aligned} y^3 &= 27 \\ y &= 3\sqrt[3]{1} \equiv 3\omega \end{aligned}$$

を得る．上式に代入して x を求める．

$$\begin{aligned} x \cdot 9(1+9\omega^2) &= 90 \\ x &= \frac{10}{\omega^2 + 9\omega} \end{aligned}$$

$\omega = 1$ のとき，

$$x = \frac{10}{1+9} = 1$$

$\omega = \cos 2/3\pi + i \sin 2/3\pi$ のとき，

$$\begin{aligned} x &= \frac{10}{\cos 4/3\pi + i \sin 4/3\pi + 9\cos 2/3\pi + i \cdot 9 \sin 2/3\pi} \\ &= \frac{10}{-1/2 - \sqrt{3}/2i - 9/2 + 9 \cdot \sqrt{3}/2i} \\ &= -\frac{10}{73}(5 + 4\sqrt{3}i) \end{aligned}$$

$\omega = \cos 4/3\pi + i \sin 4/3\pi$ のとき，

$$x = -\frac{10}{73}(5 - 4\sqrt{3}i)$$

となる．以下に解をまとめておく．

$$(x, y) = (1, 3), \left(-\frac{10}{73}(5 \pm 4\sqrt{3}i), \frac{-3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}\right)$$

問題４．★★★★

次のダランベールの微分方程式を解きなさい．

$$y = 2x\frac{dy}{dx} + (\frac{dy}{dx})^2$$

《解答》

$y = 0$ とすると，与式は $0 = 0$ となるので，これは解の 1 つである．
両辺を x で微分し，$\dfrac{dy}{dx}$ を p とおいて整理すると，

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= 2\frac{dy}{dx} + 2x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} \\
p &= 2p + 2xp' + 2pp' \\
p' &= -\frac{p}{2x+2p} \\
\frac{dx}{dp} &+ \frac{2x}{p} = -2 \qquad \cdots\ (*)
\end{aligned}$$

を得る．$(*)$ を解くと，$x = -\dfrac{2}{3}p + \dfrac{C}{p^2}$ となる．さて，この解と与式による連立方程式を解こう．

$$\begin{cases} p^2x = -\dfrac{2}{3}p^3 + C & \cdots \quad (1) \\ y = 2xp + p^2 & \cdots \quad (2) \end{cases}$$

(2) より，$p^2 = y - 2xp$ として (1) に順次代入して，次数を下げる．

$$\begin{aligned}
3xy - 6xp^2 + 2py - 4xp^2 &= C \\
3xy - 6x^2p + 2py - 4x(y - 2xp) &= C \\
\therefore \quad p &= \frac{xy + C}{2(x^2 + y)}
\end{aligned}$$

これを (2) に代入して，整理する．

$$3x^2y^2 + 4y^3 = C(4x^3 + 6xy + C)$$

以上.

問題５．★

下の行列 A について，次の問に答えなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- ある定数 a, b によって，$A^2 = aA + bE$(E は単位行列) と表されます.
  この定数 a, b を求めなさい.
- A^5 を求めなさい.

《解答》

$$A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 4A + 5E$$

以上より，$a = 4, b = 5$ である.

$$\begin{aligned} A^5 &= (A^2)^2 \cdot A \\ &= (4A + 5E)^2 \cdot A \\ &= (16A^2 + 40A + 25E) \cdot A \\ &= \{16(4A + 5E) + 40A + 25E\} \cdot A \\ &= 104A^2 + 105A \\ &= 521A + 520E \\ &= \begin{pmatrix} 1041 & 1042 & 1042 \\ 1042 & 1041 & 1042 \\ 1042 & 1042 & 1041 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

以上.

問題６．★★★

$2n$ 個（n は正の整数）の複素数 $2n+i, (2n-1)+2i, \cdots, 2+(2n-1)i, 1+2ni$ の積を計算し，その実部を求めなさい．

《解答》

与えられた積を，

$$\prod_{k=1}^{n} k = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n$$

と定義し ($\prod$ は級数の積を表す．)，

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \prod_{k=1}^{2n}\{(2n+1-k)+ki\} \\ &= \prod_{k=1}^{n}\{(2n+1-k)+ki\}\{k+(2n+1-k)i\}\end{aligned}$$

と変形する．この変形は一見アクロバティックだが，要するに

$$\begin{aligned}(n=4\text{ の与式}) &= (8+i)(7+2i)\cdots(2+7i)(1+8i) \\ &= (8+i)(1+8i)\cdots(7+2i)(2+7i)\end{aligned}$$

と，かける順番を工夫しただけである．

$$(a+bi)(b+ai) = (a^2+b^2)i$$

であることに注意して，整理すると，

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}\{(2n+1-k)+ki\}\{k+(2n+1-k)i\} &= \{(2n)^2+1^2\}i\cdot\{(2n-1)^2+2^2\}i\cdot\cdots \\ &= i^n\sum_{k=1}^{n}\{(2n+1-k)^2+k^2\}\end{aligned}$$

以上より，実部は，

$$\begin{aligned}0 \quad &(n\equiv 1,3 \pmod 4) \\ \sum_{k=1}^{n}\{(2n+1-k)^2+k^2\} \quad &(n\equiv 0 \pmod 4) \\ -\sum_{k=1}^{n}\{(2n+1-k)^2+k^2\} \quad &(n\equiv 2 \pmod 4)\end{aligned}$$

である．

問題７．★★★★

定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$ を求めなさい．

《解答》

$$\begin{aligned}\frac{x^2+1}{x^4+1} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x^2+\frac{1}{\sqrt{2}})^2+\frac{1}{2}}+\frac{1}{(x^2-\frac{1}{\sqrt{2}})^2+\frac{1}{2}}\right)\end{aligned}$$

と変形できる．

$$\begin{aligned}(与式) &= \frac{1}{2}\left(\left[\sqrt{2}\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{2}x\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}+\left[\sqrt{2}\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{2}x\right]_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)\\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{2}\mathrm{Tan}^{-1}(\sqrt{2}+1)-\sqrt{2}\mathrm{Tan}^{-1}1+\sqrt{2}\mathrm{Tan}^{-1}(\sqrt{2}-1)-\sqrt{2}\mathrm{Tan}^{-1}(-1))\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{Tan}^{-1}(\sqrt{2}+1)+\mathrm{Tan}^{-1}(\sqrt{2}-1))\\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

以上.

$\mathrm{Tan}^{-1}(\sqrt{2}+1)+\mathrm{Tan}^{-1}(\sqrt{2}-1)$ の計算方法について補足しておく．

- $\mathrm{Tan}^{-1}(\sqrt{2}+1)=\alpha$
- $\mathrm{Tan}^{-1}(\sqrt{2}-1)=\beta$

とすると，

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\\ &= \frac{(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}-1)}{1-(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}\to+\infty\end{aligned}$$

となるので，$\alpha+\beta=\pi/2$ と分かる．